

УДК 550.383

АНИЗОТРОПИЯ В ГЕОСТРОФИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2010 М.Ю.Решетняк

Институт физики Земли им. О.Ю.Шмидта РАН

Рассмотрена модель Буссинеска в плоском слое. Исследованы эффекты анизотропии в физическом и волновом пространствах, вызванные быстрым вращением. Продемонстрировано подавление процессов энергопереноса вращением. Исследованы свойства волновых треугольников при нелинейном взаимодействии. Диапазон параметров модели соответствует режимам тепловой конвекции в моделях геодинамо.

Ключевые слова: жидкое ядро Земли, тепловая конвекция, геострофический баланс, каскадные процессы.

Введение

Приближение однородной и изотропной турбулентности является весьма грубым при описании конвекции во многих геофизических приложениях. Для случая без вращения отклонение от изотропии вызвано наличием выделенного направления, связанного с силой тяжести. При оценке спектров полей отклонение наклона спектра от колмогоровского закона $-5/3$ может быть и не большим, поскольку для задачи в слое форма конвективной ячейки на пороге генерации близка к кубической [Chandrasekhar, 1981], а возможные отклонения от куба уменьшаются при переходе к малым масштабам [Frisch, 1995]. Однако, спектральные оценки не являются исчерпывающими характеристиками. Согласно модели Колмогорова мы были бы вправе ожидать изотропии и в потоках кинетической энергии в спектральном пространстве. Последнее не выполнимо для задач с подогревом снизу, хотя бы уже потому, что работа силы Архимеда по всему объему не равна нулю.

Возвращаясь к специфике геофизической конвекции, необходимо отметить роль вращения. Если влияние сил Кориолиса для конвекции в мантии еще пренебрежимо мало, то для задач метеорологии, физики океана их влияние оказывается принципиальным [Gill, 1982]. Более того, для конвекции в жидком ядре Земли сила Кориолиса превосходит нелинейный член на три порядка, в корне меняя баланс сил в уравнении Навье-Стокса и спектральные свойства его решения при больших числах Рейнольдса Re .

Введение вращения приводит к существенной перестройке течений как в физическом пространстве, так и в волновом. Несмотря на тот факт, что сама сила Кориолиса не совершает работы, за счет появления условий для обратного каскада энергии, наблюдаемого в прямых вычислениях [Hossain, 1994] и предсказанного теорией [McComb, 1992], амплитуда крупномасштабных течений может увеличиваться. Как следствие, наклон спектра кинетической энергии также увеличивается от $-5/3$ до -2 [Zhou, 1995; Constantin, 2002]. Данное изменение связано с блокированием передачи энергии по спектру [Zhou, 1995].

При переходе к задаче с тепловой конвекцией, в уравнение Навье-Стокса добавляется член, соответствующий силе плавучести, а также вводится уравнение теплопроводности. При этом возникают условия для появления циклонической конвекции с интенсивными вертикальными скоростями. В физическом пространстве задача уже достаточно

изучена в работах геодинamo. Быстрое вращение приводит к появлению равновесия между силой Кориолиса и градиентом давления (геострофический баланс) [Pedlosky, 1987]: $\mathbf{1}_z \times \mathbf{V} \sim \nabla p$, откуда следует, что градиенты полей вдоль оси вращения z малы: $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \sim 0^1$. Возникают циклоны (антициклоны), вытянутые вдоль оси вращения. Если взять жидкое ядро Земли и уменьшить амплитуду источников тепла до уровня начала возникновения конвекции, то диаметр d_c таких циклонов будет на 5 порядков меньше их высоты. В действительности, за счет того, что конвекция в ядре Земли турбулентна (число Рейнольдса достигает $Re \sim 10^9$), в волновом пространстве существует целый пакет таких циклонов, но оценки по порядку величины дают, что как минимум для первых трех-четырёх порядков по k геострофический баланс выполняется. Это существенно превосходит протяженность спектра геомагнитного поля и должно учитываться при построении моделей динамо.

Для динамики передачи энергии в волновом пространстве появление силы Кориолиса также важно. Если ранее, нелинейный член, бывший одного порядка с градиентом давления, беспрепятственно передавал энергию по спектру (например, за счет вихревой части нелинейного члена), то при появлении силы Кориолиса возможна следующая ситуация: давление компенсирует потенциальную составляющую силы Кориолиса. Вихревая же компонента силы Кориолиса блокирует перенос энергии нелинейным членом. Как следствие, спектр становится круче. Так обстоит дело на малых масштабах $l \ll d_c$. На больших же масштабах $l \gg d_c$ система может находиться в состоянии статистического равновесия: диссипация практически отсутствует, а обмен энергиями между масштабами пренебрежимо мал.

Ниже, на примере трехмерной модели тепловой конвекции в плоском слое, мы рассмотрим свойства анизотропии, вызванные вращением, как в физическом пространстве, так и в волновом для режимов, характерных для моделей конвекции в жидком ядре Земли, и сравним их с режимами без вращения.

Уравнения конвекции

Рассмотрим тепловую конвекцию несжимаемой жидкости $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ во вращающемся с угловой скоростью Ω относительно вертикальной оси z прямоугольном ящике. Введём для скорости \mathbf{V} , времени t и давления P следующие единицы измерения: κ/L , L^2/κ и $\rho\kappa^2/L^2$, где L – единица длины, κ – коэффициент молекулярной теплопроводности, ρ – плотность вещества. Система уравнений динамо в декартовой системе координат (x, y, z) примет вид:

$$\text{E Pr}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) \right] = -\nabla P - \mathbf{1}_z \times \mathbf{V} + \text{Ra} T \mathbf{1}_z + \text{E} \Delta \mathbf{V} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) (T + T_0) = \Delta T.$$

Безразмерные числа Прандтля, Экмана, Рэлея и Робертса вводятся как: $\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$, $\text{E} = \frac{\nu}{2\Omega L^2}$, и $\text{Ra} = \frac{\alpha g_0 \delta T L}{2\Omega \kappa}$, где ν – коэффициент кинематической вязкости, α – коэффициент объёмного расширения, g_0 – ускорение свободного падения, δT – единица возмущения

¹Обратим внимание, что имеется в виду баланс потенциальной компоненты силы Кориолиса.

температуры T относительно “диффузионного” распределения температуры $T_0 = 1 - z$. Число Россби введем как $Ro = EPr^{-1}$. Задача (1) решалась в прямоугольном ящике с периодическими граничными условиями по координатам x, y . Для границ $z = 0, 1$ возмущения температуры T равны нулю, что с учетом выбранного профиля T_0 , эквивалентно заданию температур на границах: $\tilde{T} = T + T_0 = 1, 0$ (подогрев снизу).

Для поля скорости принимаем условие непроникновения и равенство нулю градиентов тангенциальных компонент на $z = 0, 1$: $V_z = \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0$. Такая постановка граничных условий гарантирует равенство нулю тангенциальных компонент тензора вязких напряжений, а также нулевые значения гидродинамической спиральности. Для решения (1) использовался псевдоспектральный код (см. подробнее [Orszag, 1971; Meneguzzi et al., 1989; Cattaneo et al. 2003]), адаптированный для параллельных процессоров с использованием MPI [Решетняк, 2007]. Вычисления проводились на сетке N^3 , $N = 64$.

Потоки в k -пространстве

Подробнее с понятием потоков в волновом пространстве можно ознакомиться в работах [Frisch, 1995; Решетняк, 2008] и в цитируемых в них первоисточниках. Для описания обменных взаимодействий в Фурье-пространстве удобно разделить волновое пространство на оболочки (*shells*), такие, что $k_i < k < k_{i+1}$, $k_{i+1}/k_i = \gamma$, обычно принимают $\gamma = 2$. Далее нас будет интересовать обмен энергиями между такими оболочками (каскадные процессы). Введем разложение поля f на высоко- и низкочастотную компоненты: $f(\mathbf{r}) = f^<(\mathbf{r}) + f^>(\mathbf{r})$, где

$$f^<(\mathbf{r}) = \sum_{|k| \leq K} \hat{f}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad f^>(\mathbf{r}) = \sum_{|k| > K} \hat{f}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2)$$

соответственно. Для периодических полей f и g имеем (см. подробнее [Frisch, 1995]):

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad \left\langle g \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = - \left\langle f \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle, \quad \left\langle f^> g^< \right\rangle = 0, \quad (3)$$

где

$$\left\langle f(\mathbf{r}) \right\rangle = \mathcal{V}^{-1} \int_{\mathcal{V}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^3 \quad (4)$$

означает осреднение поля f по объему \mathcal{V} . Умножая уравнение Навье - Стокса на $\mathbf{V}^<$, имеем выражение для среднего по объему изменения кинетической энергии в сфере радиуса K :

$$2^{-1} EPr^{-1} \left[\frac{\partial \langle V_i^< V_i^< \rangle}{\partial t} + \Pi(K) \right] = Ra \langle T^< V_z^< \rangle - E \langle (\nabla \boldsymbol{\omega}^<)^2 \rangle, \quad (5)$$

где интегральный поток кинетической энергии из области $k > K$ в область $k \leq K$ задан в виде

$$\Pi(K) = \langle V_i^< \cdot (V_j \cdot \nabla_j) V_i \rangle, \quad (6)$$

и по повторяющимся индексам $i = 1 \dots 3$ проводится суммирование. Удобно ввести локальный поток кинетической энергии T_K :

$$T_K(k) = -\frac{\partial \Pi(k)}{\partial k}, \quad \int_{k=0}^{\infty} T_K(k) dk = 0. \quad (7)$$

Тогда для уравнения Навье-Стокса имеем:

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = T_K(k) + F(k) + D(k), \quad (8)$$

где $E(k) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k} \langle \mathbf{V}_k^2 \rangle$ – изменение кинетической энергии на волновом числе k , $F(k) = \frac{\text{Ra Pr}}{\text{E}} \frac{\partial}{\partial k} \langle TV_z^< \rangle$ – работа силы Архимеда, $D(k) = -\text{Pr } k^2 E(k)$ – диссипация. Выражение (8) описывает суммарный поток кинетической энергии через волновое число k .

Для изучения детальной структуры триадного механизма можно задаться вопросом о виде энергетического уравнения, описывающего передачу энергии от оболочек Q и P оболочке K :

$$\frac{\partial E(K)}{\partial t} = T_3 + A(K) + D(K), \quad (9)$$

где $E(K)$ и $D(K)$ имеют тот же вид, что и в (8), а $T_3 = \langle V_i(K) \cdot (V_j(P) \cdot \nabla_j) V_i(Q) \rangle$, $A(K) = \frac{\text{Ra Pr}}{\text{E}} \langle T(K) V_z(K) \rangle$.

Полезно также ввести функцию $T_2(K, Q) = \int T_3(K, Q, P) dP$. Вообще говоря, последнее требует пояснения. Можно показать, что T_2 означает поток энергии от гармоники Q к гармонике K (см. ссылки в [Alexakis et al., 2007]). Анализ T_2 позволяет оценить локален, или нет перенос энергии, но не локальность самого взаимодействия. Изучение же T_3 , позволяет полностью восстановить структуру волнового треугольника и выяснить является ли само взаимодействие локальным, или нет. Отметим, также полезные свойства функции T_2 : в общем случае, для произвольных периодических (или случайных однородных) бездивергентных полей $\mathbf{u}(Q)$, $\mathbf{w}(K)$ и \mathbf{V} имеем [Alexakis et al., 2005]:

$$T_2^{uw}(Q, K) = -T_2^{wu}(K, Q), \quad (10)$$

где $T_2^{uw}(Q, K) = \langle u_i(K) \cdot (V_j \cdot \nabla_j) w_i(Q) \rangle$, $T_{wu}(Q, K) = \langle w_i(Q) \cdot (V_j \cdot \nabla_j) u_i(K) \rangle$, что соответствует равенству энергии, полученной оболочкой K от оболочки Q и энергии отданной оболочкой Q оболочке K . Ниже мы рассмотрим свойства потоков T_K , T_2 , T_3 на примере системы (1) и выясним, как они меняются при введении вращения.

Поведение в физическом пространстве

Возникновение конвекции в бесконечном плоском слое является пороговым явлением, происходящим при увеличении числа Рэлея до критического значения Ra^{cr} . Рассмотрим три режима конвекции (рис.1):

NR: Режим без вращения (сила Кориолиса равна нулю), $\text{Ra} = 9 \cdot 10^5$, $\text{Pr} = 1$, $\text{E} = 1$,

$$\text{Re} \sim 700.$$

R1: Режим с вращением, $\text{Ra} = 4 \cdot 10^2$, $\text{Pr} = 1$, $E = 2 \cdot 10^{-5}$, $\text{Re} \sim 200$.

R2: Режим с вращением, $\text{Ra} = 1 \cdot 10^3$, $\text{Pr} = 1$, $E = 2 \cdot 10^{-5}$, $\text{Re} \sim 10^4$.

Первый режим, представленный на рис. 1, соответствует турбулентной конвекции без вращения² с квазипериодическим поведением кинетической энергии во времени $E_K(t)$. Обратим внимание на появление мелкомасштабной гидродинамической спиральности $\mathcal{H}^{\mathcal{H}} = \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{V}$. Для случая без вращения, в силу отсутствия выделенного направления, среднее значение спиральности $\overline{\mathcal{H}_V^{\mathcal{H}}}$ по z равно нулю см.рис. 2. Подробнее этот вопрос изложен в работах по теории динамо средних полей [Moffat, 1978; Krause et al., 1980]; см. также результаты прямых численных вычислений в [Meneguzzi et al., 1989].

Тепловая конвекция с вращением характеризуется появлением большого числа вертикальных вращающихся колонок (циклонов-антициклонов). Их число зависит от числа Экмана как $k_c \sim E^{-1/3}$ [Chandrasekhar, 1981; Busse, 1970; Jones et al., 2000]. Для жидкого ядра Земли $E \sim 10^{-15}$, что очевидно не позволяет проводить вычисления при реалистичных значениях параметра. Обычно, удается добиться режимов с $E = 10^{-4} \div 10^{-6}$ [Jones, 2000]. Целью численных экспериментов является получение асимптотического режима, с последующей экстраполяцией результатов к параметрам жидкого ядра Земли. Также, из линейного анализа известно, что критическое число Рэлея, при котором начинается конвекция, зависит от числа Экмана как $\text{Ra}^{\text{cr}} \sim E^{-1/3}$. Увеличение Ra^{cr} связано с появлением циклонической конвекции, приводящей к повышенной диссипации.

Режим *R1* соответствует геострофическому состоянию конвекции вблизи порога генерации, характеризуемого регулярной пространственной структурой циклонов (см. рис. 1). Увеличение Ra (режим *R2*) приводит к нарушению упорядоченности циклонов, появлению мелкомасштабных течений в направлении z , отклонению от геострофии. Нелинейный член становится ближе по амплитуде к силе Кориолиса и градиенту давления, временное поведение становится более хаотическим. В обоих случаях с вращением наблюдается появление гидродинамической спиральности $\mathcal{H}^{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{V} \rangle_{xy} \sim z - 0.5$ (осреднение проведено в плоскости (x, y)) [Решетняк, 2007] (см. рис. 2). Для режима *NR*, как уже было отмечено выше, $\mathcal{H}^{\mathcal{H}}$ равно нулю.

Рассмотрим подробнее поведение кинетической энергии для различных компонент скорости вдоль координаты z , рис. 3. Различное поведение компонент энергии - поперечной $E_K^{\perp} = (V_x^2 + V_y^2)/2$ и продольной $E_K^{\parallel} = V_z^2/2$ - связано с используемыми граничными условиями. Для режима *NR* в основном объеме компоненты энергии сравнимы: $\lambda_{\text{NR}} = \frac{E_K^{\perp}}{2E_K^{\parallel}} \Big|_{z=0.5} \sim 0.8$, где коэффициент 2 появляется за счет суммирования по двум горизонтальным направлениям. Для *R1*, напротив, при приближении к центральной области происходит смена знака вращения и E_K^{\perp} обращается в ноль: $\lambda_{\text{R1}} \sim 8$. Интересно, что увеличение Ra (режим *R2*) приводит к увеличению анизотропии во всем объеме: $\lambda_{\text{R1}} \sim 0.1$, т.е. при достаточно больших Ra и сильном вращении происходит вырождение потоков кинетической энергии в вертикальном направлении. Это, так называемое вырождение трехмерной конвекции в двумерную, предсказанное в работах [Betchelor, 1953],

²Поскольку на пороге генерации горизонтальные размеры $L_x = L_y$ конвективной ячейки больше, чем вертикальный L_z , обычно используется вытянутый в горизонтальном направлении ящик. В расчетах $L_x = L_y = 5L_z \equiv 5L$.

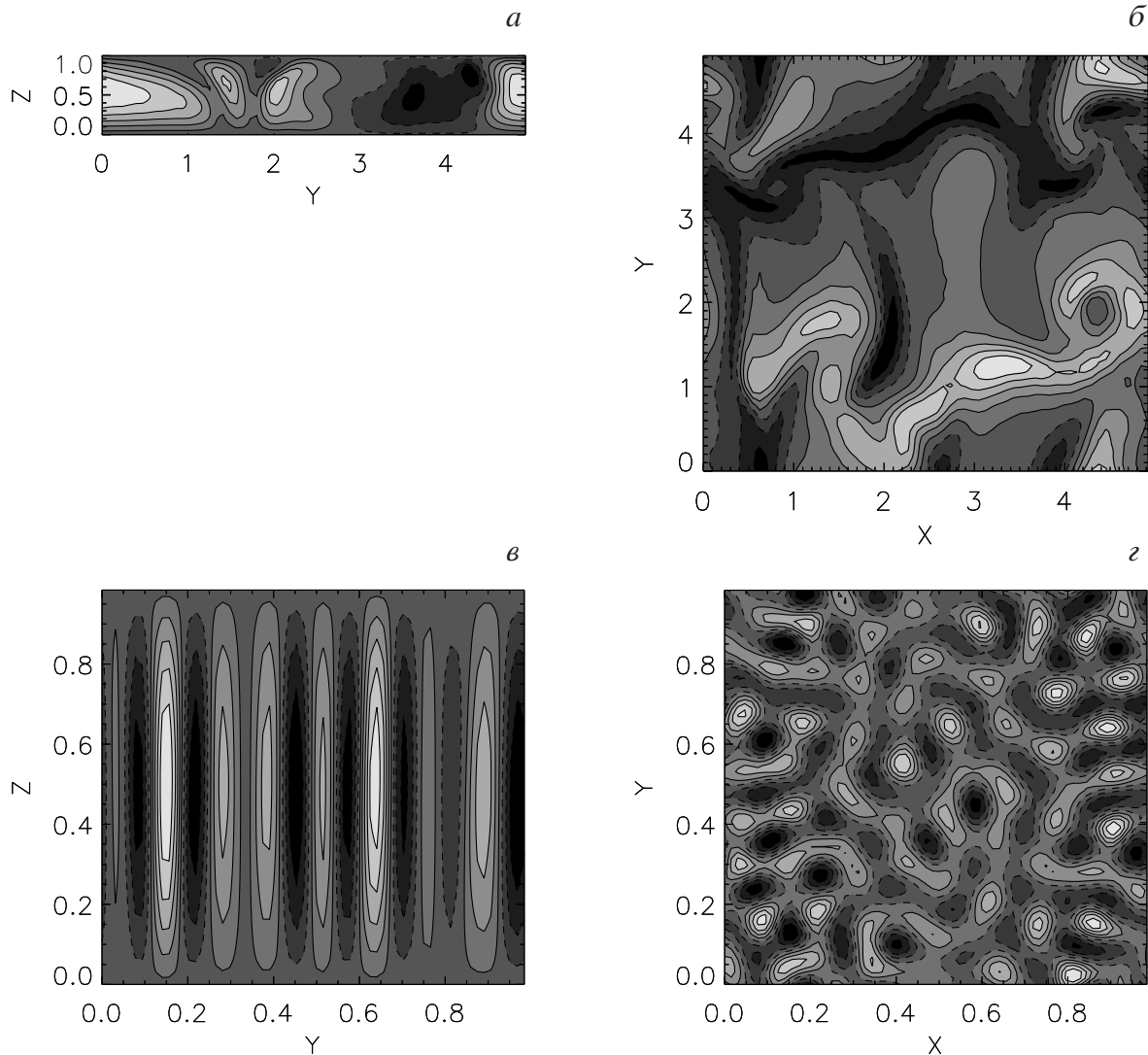


Рис. 1. Распределение вертикальной компоненты скорости V_z без вращения (а,б: режим NR , диапазоны полей: $(-257 \div 506)$ и $(-254 \div 572)$) и с вращением (в,г: режим RI , диапазоны полей: $(-88 \div 127)$ и $(-55 \div 86)$) для сечения $x = 4.3, z = 0.8$

см. также аналогичное вырождение под действием крупномасштабного магнитного поля [Kraichnan, 1965]. Также, при увеличении Re ($R2$) хорошо видно появление слоевых структур при $z = 0, 1$. Последнее связано как с существованием теплового пограничного слоя с толщиной $\delta_T \sim Ra^{-1/3}$, так и с невязкими граничными условиями для V_x и V_y .

Спектры полей и потоки в волновом пространстве

Рассмотрим для всех трех режимов спектры полной кинетической энергии $E_K(k)$, а также продольный $E_K^{\parallel}(k_{\parallel}) = \iint E_K(k_x, k_y, k_z) dk_x dk_y$ и трансверсальный

$$E_K^{\perp}(k_{\perp}) = \int E_K(k_x, k_y, k_z) dk_z \text{ спектры, где } k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2, k_{\parallel} \equiv k_z.$$

Для режима NR спектральные свойства конвекции близки к колмогоровской зависимости $\sim k^{-5/3}$ (рис. 4). Поведение же спектров E_K^{\parallel} и E_K^{\perp} отличается лишь нормировочным множителем $\sim k$, что свидетельствует о высокой степени изотропии режима без вращения. Данный результат хорошо согласуется с тем фактом, что форма конвективных ячеек

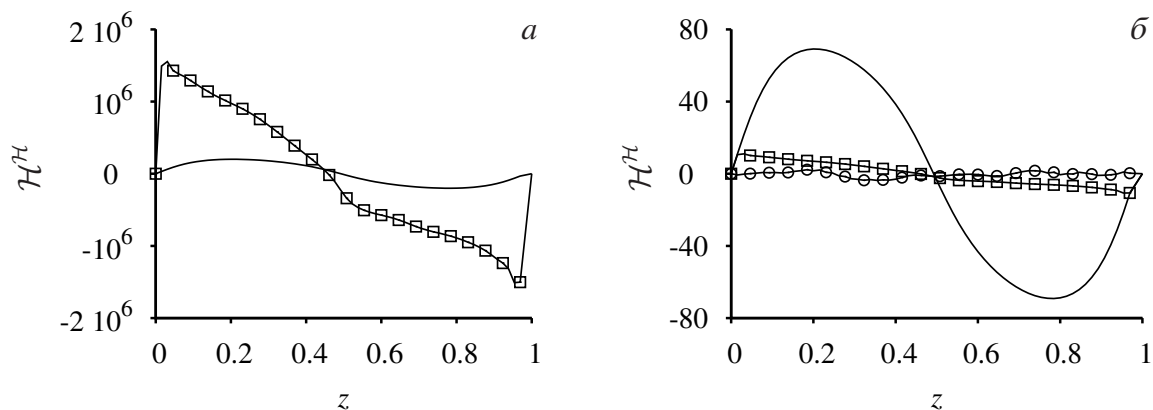


Рис. 2. Профиль гидродинамической спиральности $\mathcal{H}^{\mathcal{H}}$ для $E = 3 \cdot 10^{-5}$, $Pr = 1$, $Ra = 4 \cdot 10^2$ (сплошная линия) и $Ra = 1.2 \cdot 10^3$ (квадратики) (а). Значения нормированы на среднюю по объему кинетическую энергию $(\overline{E_K})$ (б). Кривая с кружочками соответствует случаю без вращения

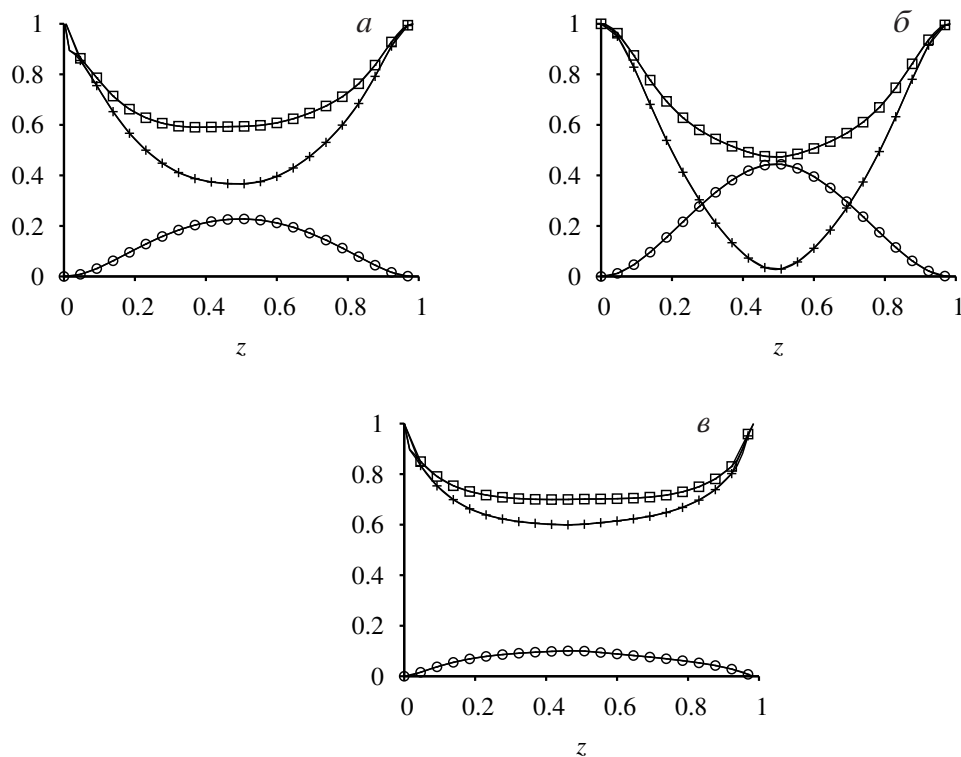


Рис. 3. Зависимость поперечной E_K^{\perp} (крестики), продольной E_K^{\parallel} (кружочки) и интегральной E_K (ромбики) кинетической энергии по высоте для трех режимов NR (а), $R1$ (б), $R2$ (в)

на пороге возникновения конвекции близка к изотропной.

Спектры конвекции с вращением отличаются от спектров без вращения. Режим $R1$ близок к пороговому. На интегральном спектре (рис.4,а) хорошо виден пик $k_c \sim 8$, соответствующий циклоническим течениям. При увеличении Ra (режим $R2$) провал в спектре начинает заполняться и интегральный спектр становится похожим на спектр без вращения. Заполнение спектра также наблюдается в задачах со сферической геометрией [Peshetnyak, 2006] и в каскадных моделях турбулентности [Reshetnyak et al., 2006].

Для режима $R1$ спектры E_K^{\perp} и E_K^{\parallel} сильно различаются: спектр E_K^{\parallel} не чувствует гра-

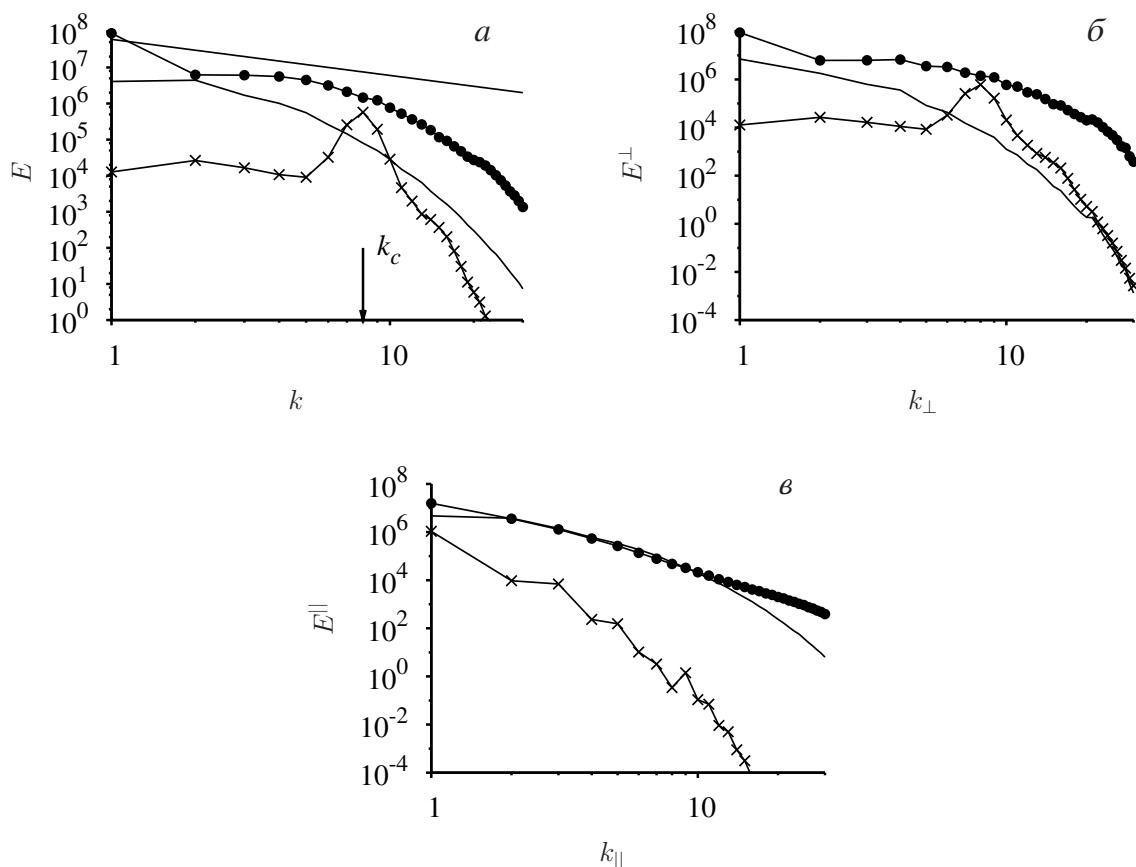


Рис. 4. Спектры кинетической энергии E_K , E_K^{\perp} , E_K^{\parallel} как функция k (а), k_{\perp} (б) и k_{\parallel} (в) для режимов NR (сплошная линия), R1 (крестики) и R2 (кружочки). Прямая линия соответствует спектру Колмогорова $\sim k^{-5/3}$

ницы $k = k_c$, в то время как для $k < k_c$ поведение E_K^{\perp} близко к белому спектру, а для больших k_{\perp} спектр E_K^{\perp} резко падает. При переходе к большим Ra E_K^{\parallel} приближается к колмогоровскому спектру, а трансверсальный спектр по-прежнему остается белым для малых k_{\perp} и близким по наклону к спектру без вращения для $k_{\perp} > k_c$.

Обратим внимание, что для режимов R1, R2 форма интегральных спектров E_K полностью определяются формой трансверсальных спектров E_K^{\perp} .

Наблюдаемое сходство в поведении спектров R2 и NR еще не свидетельствует о сходстве физических процессов: известно, что в двумерной турбулентности [Kraichnan et al., 1980] также наблюдается спектр кинетической энергии $\sim k^{-5/3}$, но передача энергии происходит не от больших масштабов к меньшим, а наоборот. Приведенные оценки членов для R2 [Решетняк, 2008] свидетельствуют о выполнении геострофического баланса.

Рассмотрим поведение $T_K(k)$. Режим NR демонстрирует хорошо известную картину колмогоровского прямого каскада кинетической энергии (рис. 5). Для больших масштабов T_K отрицательно, что означает отток энергии к малым масштабам. По мере перехода в инфракрасную часть спектра знак потока меняется на положительный - энергия потребляется. Для двумерной турбулентности наблюдается зеркально-симметричная картина для потока [Kraichnan et al., 1980]. В этом случае вместо прямого каскада энергии наблюдается обратный каскад.

Вращение существенно меняет поведение потоков энергии. Энергонесущим волно-

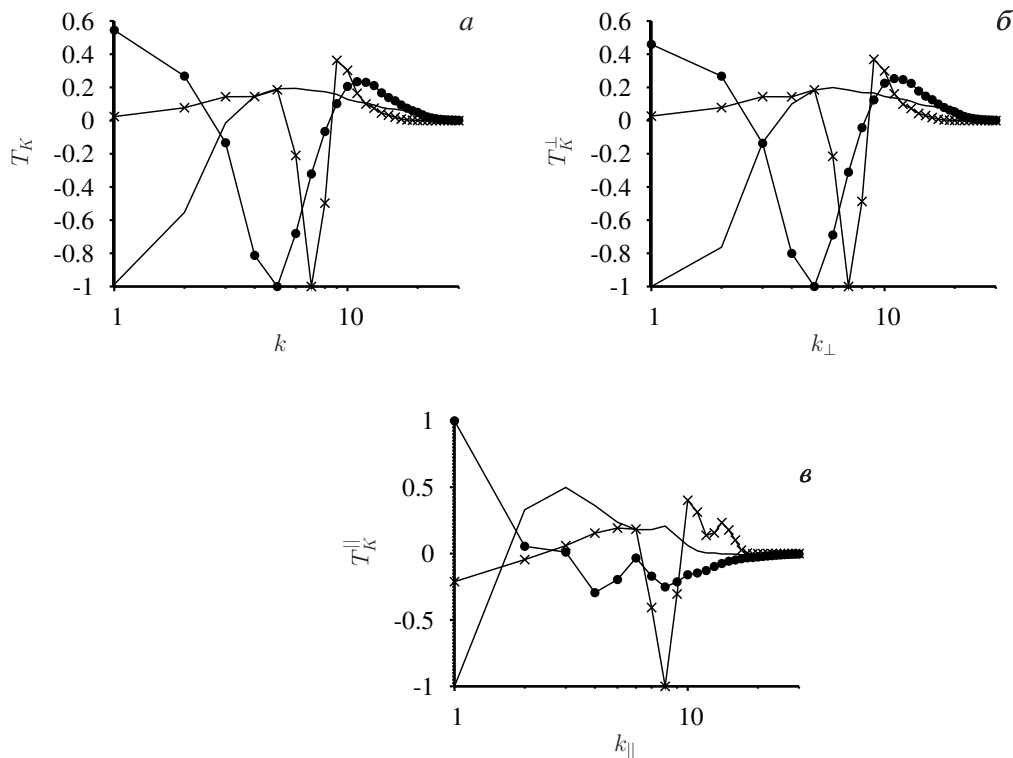


Рис. 5. Потоки кинетической энергии T_K как функция k (а), k_{\perp} (б) и k_{\parallel} (в) для режимов NR (сплошная линия), $R1$ (крестики) и $R2$ (кружочки). Значения нормированы на величины экстремумов $c_{NR} = 1.5 \cdot 10^{13}$, $c_{R1} = 5.8 \cdot 10^{11}$, $c_{R2} = 2.7 \cdot 10^{13}$ (для а), $c_{NR}^{\perp} = 1.2 \cdot 10^{13}$, $c_{R1}^{\perp} = 5.8 \cdot 10^{11}$, $c_{R2}^{\perp} = 2.6 \cdot 10^{13}$ (для б), $c_{NR}^{\parallel} = 2.9 \cdot 10^{12}$, $c_{R1}^{\parallel} = 8.3 \cdot 10^9$, $c_{R2}^{\parallel} = 2.5 \cdot 10^{12}$ (для в)

вым числом является k_c . Для $k > k_c$ мы также наблюдаем прямой каскад энергии ($T_K > 0$). Максимум T_K смещен относительно максимума спектра вправо тем больше, чем больше Re . Для $k < k_c$ картина существенно сложнее: для небольших волновых чисел наблюдается обратный каскад энергии ($T_K < 0$). В тоже время, в большей части области волновых чисел $0 < k < k_c$ каскад прямой ($T_K > 0$).

Для оценки эффектов анизотропии представим поток T_K в виде суммы поперечного T_K^{\perp} и продольного T_K^{\parallel} потоков, где в выражении (6) при суммировании по индексу j брались значения $1 \dots 2$ и 3 , соответственно, и $i = 1 \dots 3$ для обоих потоков. Для режима NR качественно поведение потоков T_K^{\perp} и T_K^{\parallel} не отличается. Оценим анизотропию потоков через отношение амплитуд потоков $\mathcal{A} = \frac{c^{\perp}}{2c^{\parallel}}$. Тогда для режима NR $\mathcal{A}_{NR} \sim 2$. Для двух других рассмотренных случаев $\mathcal{A}_{R1} \sim 35$ и $\mathcal{A}_{R2} \sim 5$. Очевидно, что при ярковыраженном состоянии геострофии ($R1$) потоки энергии вдоль оси z блокируются. Также из графика видно, что при увеличении Re исчезает минимум для T_K^{\parallel} : последнее связано с дроблением циклонов по направлению z . В то же время, горизонтальный масштаб $1/k_c$ по-прежнему остается энергонесущим (см. рис. 5,б).

Локальность потока энергии

Перейдем к вопросу о структуре триадных взаимодействий. На рис. 6 представлена диаграмма антисимметричных относительно диагонали $K = Q$ потоков T_2 для рассмот-

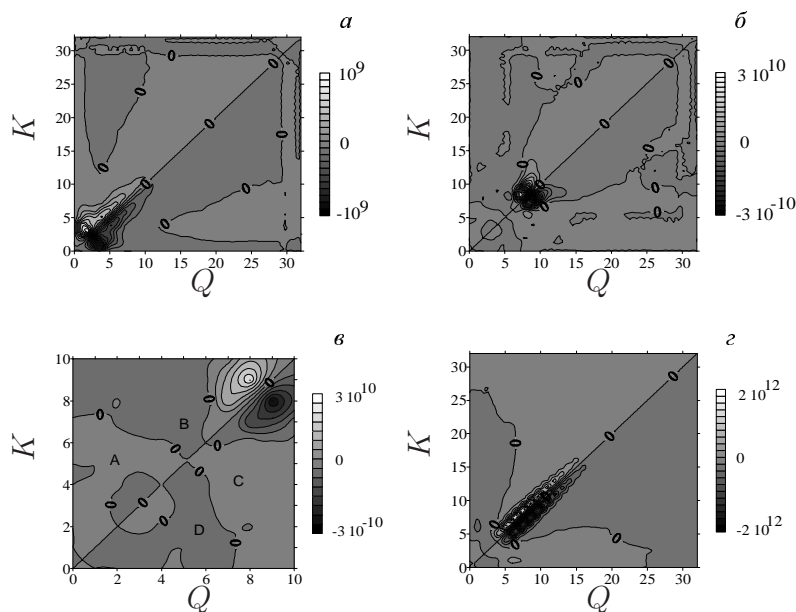


Рис. 6. Потoki кинетической энергии $T_2(k)$ для режимов NR (а), R1 (б и в), R2 (г)

ренных выше режимов. В целом, картина напоминает результаты с вынужденной силой в работе [Alexakis et al., 2007]: гармоники с $K > Q$ отбирают энергию у гармоник с $K < Q$ (прямой каскад энергии). Максимум потока приходится на близкие к диагонали гармоники с $K \sim Q$, т.е. присутствует локальный перенос энергии. Обратим внимание на существование областей (например, $Q = 5, K = 20$), для которых наблюдается и нелокальный обратный каскад энергии (см. обсуждение во введении), интегрально же, картина близка к идеализированному колмогоровскому сценарию. Удобно представить диаграмму, приведенную на рис. 6, в виде интеграла по Q и K , как функцию $K - Q$, см., рис. 7. Рисунок отчетливо демонстрирует наличие прямого каскада, а также локального взаимодействия и локального переноса энергии.

Вращение меняет поведение T_2 для $k < k_c$, оставляя его практически без изменения для высокочастотной области $k > k_c$. Рассмотрим появившиеся изменения более подробно. Положение абсолютных максимумов (минимумов) приходится на область, близкую к k_c , т.е. энергия передается в область больших k от лидирующей моды. С другой стороны, для $k < k_c$ наблюдается резкое уменьшение потока энергии, что соответствует приближению системы к статистическому равновесию, аналогично представленному на рис. 5. В увеличенном варианте (см. рис. 6(в)) наблюдается более тонкая структура для малых k : область A с прямым каскадом энергии и с равновероятным её переносом как от малых $Q \sim K$, так и от сравнительно больших $Q \sim 4K$. Область B с обратным каскадом энергии (и также, как и у области A, небольшой амплитудой потока энергии порядка 1/10 от абсолютного максимума) имеет протяженную полосообразную форму от $Q \sim K$ до $Q \sim 10K$. На рис. 7,б это соответствует появлению небольшого отрицательного минимума для $K > Q$ ³.

³Мы не комментируем поведение кривой для $K < Q$ (области C и D), поскольку данная зависимость антисимметрична.

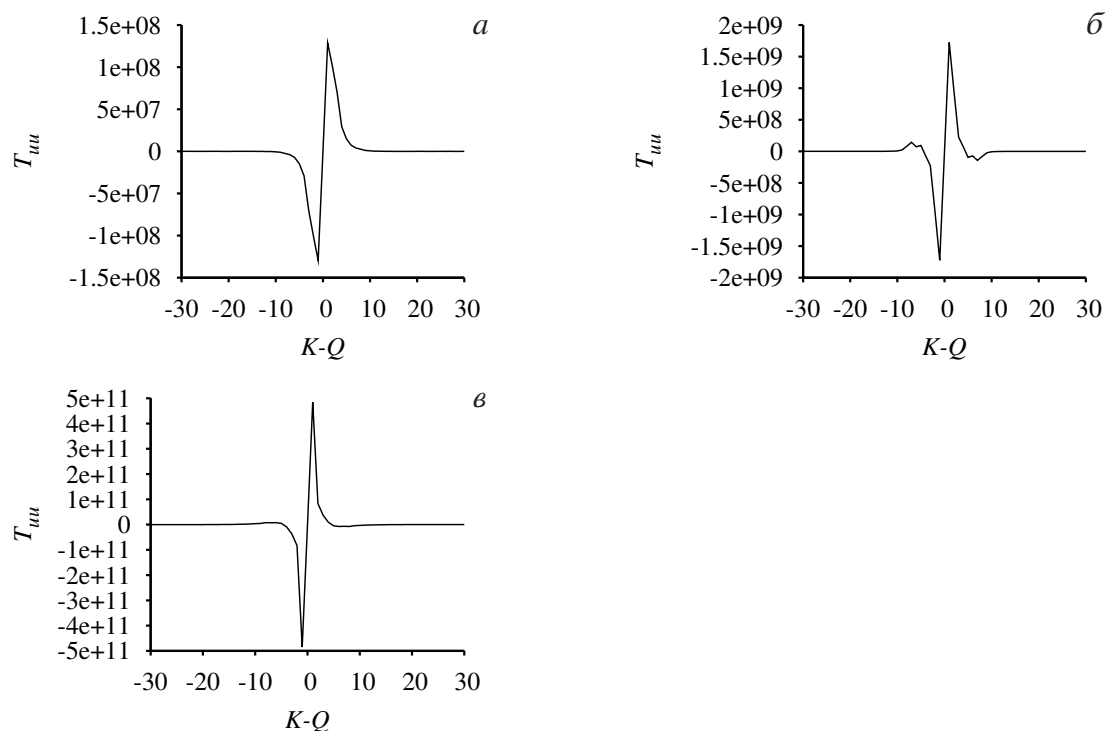


Рис. 7. Потоки кинетической энергии $T_2(K - Q)$ для режимов NR (а), R1 (б), R2 (в)

Увеличение Ra (режим R2) приводит к смещению области с обратным каскадом энергии в направлении малых Q и $K > Q$. Как и прежде, можно говорить о существовании состояния, близкого к равномерному для $k < k_c$. Данный режим также характеризуется более длинным интервалом в области $k > k_c$ с локальным переносом энергии и прямым каскадом. Относительный вклад области с обратным каскадом становится меньше (рис. 7, в). В то же время, этот вклад переносится на крупномасштабную область $k \ll k_c$, что может быть интересно для задач геодинamo, в которых $k_c \sim 10^5$ и область генерации магнитного поля (при современных оценках магнитного числа Рейнольдса $R_m \sim 10^2 \div 10^3$ область генерации магнитного поля лежит в диапазоне $k \sim 1 \div 10^3$) разнесены как минимум на несколько порядков.

Локальность взаимодействия

Остановимся подробнее на свойствах функции T_3 для рассмотренных выше режимов. По соображениям симметрии мы ожидаем, что $T_3(K, P, Q) = T_3(K, Q, P)$, что было использовано в построении дискретного аналога оператора. Случай без вращения (рис. 8, а, б) демонстрирует крайне интересный результат: наибольший вклад в поток энергии, приходящийся на гармонику K , исходит от двух источников - волн с $P \lesssim K, Q \ll P$ и $Q \lesssim K, P \ll Q$.

Другими словами, волновой треугольник является равнобедренным с небольшим углом между равными сторонами (K, P или K, Q). Учитывая тот факт, что согласно рис. 7 энергия передается K от близлежащего меньшего волнового числа, можно прийти к выводу, что третий, малый по амплитуде вектор является катализатором. Участвуя в обменном процессе, эта высокочастотная гармоника сама энергию волне K не дает. Полученный результат не укладывается в классическое представление теории Колмогорова, согласно которой волновой треугольник должен быть равносторонним, то есть не только перенос

энергии является локальным, но и само триадное взаимодействие отвечает этому свойству. Это вызвано двумя причинами. Во-первых, учитывая результаты работы [Alexakis et al., 2007], мы связываем это с недостаточной длиной рассматриваемого спектра, поскольку для используемого разрешения для режима NR мы имеем лишь несколько вертикальных плюмов. С другой стороны, с существованием самих плюмов, и как следствие анизотропией системы. В этой связи известно, что даже при существенно больших числах Рейнольдса в задачах с вынужденной силой, анизотропия течения на малых масштабах оказывается существенной [Zhou et al., 1996]. Наше моделирование свидетельствует, что существует высокая корреляция потоков энергии на малых масштабах с масштабом силы плавучести на большом масштабе. Сказанное хорошо демонстрируется на поведении функции $r(K) = \int T_3 \cdot \max(P/Q, Q/P) dP dQ / \int T_3 dP dQ (P, Q > 0)$, см. рис.9. Практически для

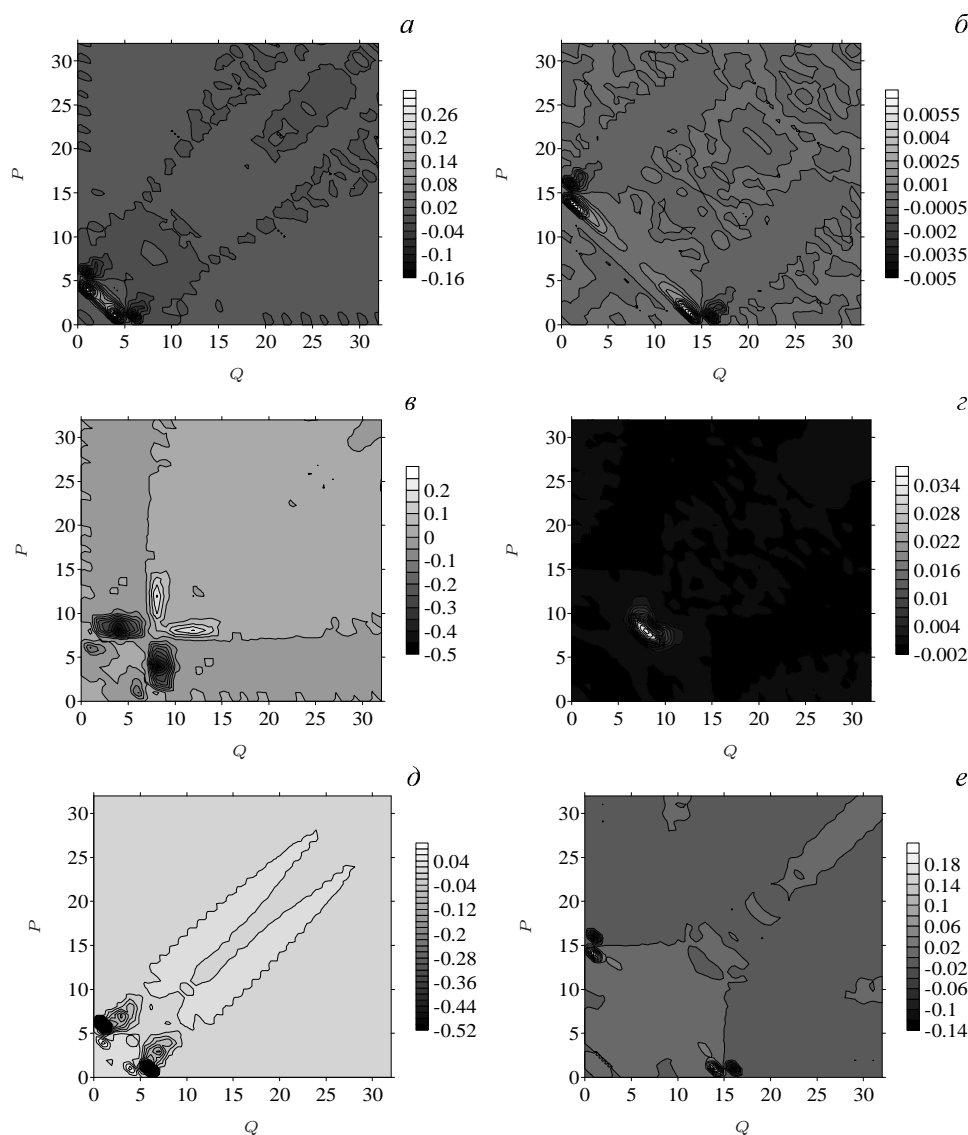


Рис. 8. Амплитуды потоков T_3 для фиксированного $k NR$: а – $k = 5$, б – $k = 15$; $R1$: в – $k = 7$, г – $k = 15$; $R2$: д – $k = 5$, е – $k = 15$

всех K угол $\alpha(K) = \int f \cdot T_3 dP dQ / \int T_3 dP dQ$ ($f = (P^2 + Q^2 - K^2)/2PQ$) между векторами \mathbf{p} и \mathbf{q} составляет порядка 100° , т.е. моды, участвующие во взаимодействии, близки к ортогональным в волновом пространстве.

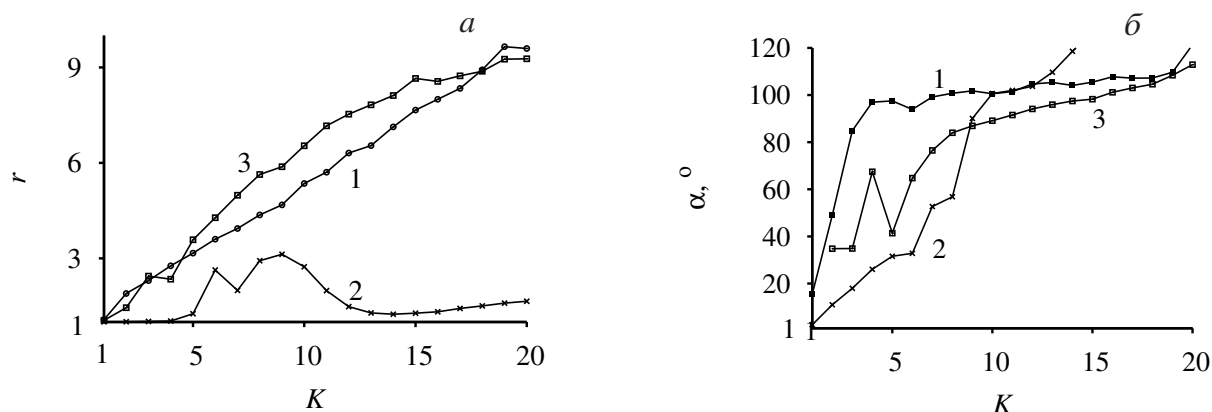


Рис. 9. Зависимость максимума отношений волновых чисел P/Q , Q/P (а) и угла между векторами \mathbf{p} и \mathbf{q} (б), входящих в триадное взаимодействие, как функция волнового числа K результирующей гармоники

Обратимся к случаю с вращением. Структура триад для небольших Ra сильно отличается от режима без вращения. Одна и та же гармоника взаимодействует с целым волновым пакетом: диаграмма имеет крестообразное строение. Последнее возможно за счет увеличения угла между векторами \mathbf{p} и \mathbf{q} . Обратим внимание, что для небольших K и $P \sim Q$, см. рис.9. Хорошо прослеживается обратный каскад энергии для небольших K , (см. рис.8): гармоника с $K = 7$ получает энергию от волновых чисел с большими номерами, отдавая ее в коротковолновую часть спектра. По мере увеличения K мы снова приближаемся к состоянию, когда $P \sim Q$, а $\alpha \sim 100^\circ$. Но в отличие от случая без вращения, энергия, приходящаяся на волну K , передается от волн с $P \sim Q \approx 0.7K$. Увеличение Ra приводит систему в режим, промежуточный между рассмотренными выше.

Обсуждение и выводы

Остановимся на основных результатах работы. Вращение существенно меняет как морфологию течений в физическом пространстве, так и спектральные свойства системы. При введении вращения характерная картина рэлей –бэнаровской конвекции трансформируется в конвекцию циклонического вида. В целом, вращение подавляет процесс конвекции за счет усиления диссипации: горизонтальный масштаб циклонов меньше вертикального в $E^{-1/3}$ раз. Более того, вращение приводит к избирательному подавлению движения вдоль оси вращения ($\lambda_{R2} \ll 1$), а также нарушению зеркально-отражательной симметрии системы, выражающемуся в появлении ненулевой средней гидродинамической спиральности $\overline{\mathcal{H}^T} \neq 0$.

В спектральном пространстве при вращении и небольших Ra положение максимумов спектров сильно отличается от k_c . Для мод с $k < k_c$ наблюдается небольшой обратный каскад энергии, взаимодействие становится нелокальным. Можно говорить о состоянии статистического равновесия, когда обмен энергиями между соседними Фурье-модами мал или полностью отсутствует. Для мод с $k > k_c$ каскад энергии становится прямым,

однако возможен нелокальный переброс энергии от малых $k \sim k_c$. Сами спектры сильно отличаются для $k < k_c$ и $k > k_c$. Для длинных волн спектр близок к белому шуму, для области больших k спектр убывает.

Рассмотренные выше подходы демонстрируют многообразие взаимодействия отдельных мод в еще достаточно простой с точки зрения полной задачи геодинамо системы без магнитного поля. Использование такого анализа позволит настроить разрабатываемые модели с турбулентными коэффициентами переноса, так, чтобы для масштабов, больших масштаба осреднения d_a , значения потоков совпадали с рассмотренными выше в прямом численном моделировании. Только такое поэтапное сравнение может гарантировать правильность вводимой полуэмпирической модели турбулентности. Нетривиальным является воссоздание обратного каскада энергии, когда $d_c < d_a$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (грант N03-05-64074).

Литература

- Решетняк М.Ю.* Тепловая конвекция и динамо при быстром вращении // Физика Земли. 2007. №8. С.23–32.
- Решетняк М.Ю.* Некоторые свойства циклонической турбулентности в жидком ядре Земли // Геомагнетизм и Аэрономия. 2008. Т. 48. №3. С.416–423.
- Alexakis A., Mininni P.D., Pouquet A.* Shell to shell energy transfer in MHD. I. Steady state turbulence // Phys. Rev. 2005. V. E 72 P.046301–046309.
- Alexakis A., Mininni P.D., Pouquet A.* Turbulent cascades, transfer, and scale interactions in magnetohydrodynamics // New Journal of Physics. 2007. V.298. №9. P.1–20.
- Batchelor G.K.* The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press. 1953. 197p.
- Busse F.H.* Thermal instabilities in rapidly rotating systems // J. Fluid Mech. 1970. V.44. P.441–460.
- Cattaneo F., Emonet T., Weis N.* On the interaction between convection and magnetic fields // ApJ. 2003. V.588. P.1183–1198.
- Chandrasekhar S.* Hydrodynamics and hydromagnetic stability. NY.: Dover Publications. Inc. 1981. 654p.
- Constantin P.* Energy spectrum of quasigeostrophic turbulence // Phys. Rev. Lett. 2002. V.89. №18. P.184501–1–184501-4.
- Frisch U.* Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge University Press. 1995. 296p.
- Gill A. E.* Atmosphere-ocean dynamics. NY: Academic Press. 1982. 645p.
- Hossain M.* Reduction in the dimensionality of turbulence due to a strong rotation // Phys. Fluids. 1994. V.6, №4 P.1077–1080.
- Jones C.A.* Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. R. Soc. London. 2000. V.A358. P.873–897.
- Jones C.A., Roberts P.H.* Convection Driven Dynamos in a Rotating Plane Layer // J. Fluid Mechanics. 2000. V.404. P.311–343.
- Kraichnan R.H.* Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence // Phys. Fluids. 1965. V.8. P.1385–1387.
- Krause F., Rädler K.-H.* Mean field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Berlin: Akademie-Verlag. 1980. 271p.

- Kraichnan R.H., Montgomery D.* Two-dimensional turbulence // Rep. Prog. Phys. 1980. V.43. P.547–619.
- McComb W.D.* The physics of fluid turbulence. Oxford: Clarendon Press. 1992. 595p.
- Meneguzzi M., Pouquet A.* Turbulent dynamos driven by convection // J.Fluid Mech. 1989. V.205. P.297–318.
- Moffatt H.K.* Magnetic field generation in electrically conducting fluids. Cambridge: Cambridge University Press. 1978. 343p.
- Orszag S.A.* Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries. I. Galerkin (spectral) representations // Stud. Appl. Math. 1971. V.L. №51. P.293–327.
- Pedlosky J.* Geophysical Fluid Dynamics. NY: Springer-Verlag. 1987. 720p.
- Reshetnyak M., Steffen B.* Shell models in rapidly rotating dynamo systems // Numerical Methods and Programming. 2006. V.7. P. 85-92.
<http://www.sccc.msu.su/num-meth/english/index.html>
- Zhou Y.* A phenomenological treatment of rotating turbulence // Phys. Fluids. 1995. V. 7. N8. P.2092–2094.
- Zhou Y., Yeung P.K.* Scale disparity and spectral transfer in anisotropic numerical turbulence // Phys. Rev. 1996. V. E 53, P.1261– 1264.