

ВОЛНЫ РОССБИ И КАСКАДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

© 2012 г. М. Ю. Решетняк

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 12.12.2011 г.

Рассмотрены триадные нелинейные взаимодействия в уравнении Навье–Стокса для квазигеострофической тепловой конвекции в сферической оболочке. Приведенный анализ позволяет понять природу передачи кинетической энергии по спектру, а также степень нелокальности переноса энергии. Отличительной чертой задачи в сфере является возникновение волн Россби, приводящих к появлению нелокального переноса энергии в системе. Результаты сравниваются с аналогичными результатами для плоской геометрии.

Ключевые слова: жидкое ядро, тепловая конвекция, динамо, спиральность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Перераспределение физических полей — весьма распространенное явление в природе. Так, в конвективных системах с диссипацией существует два основных эффекта, работающих в противоположных направлениях: диффузия (в том числе турбулентная), приводящая к увеличению степени однородности полей и нелинейные взаимодействия (например, конвективные члены, или магнитные силы в задачах динамо), вызывающие появление градиентов полей, процессам самоорганизации. К наиболее впечатляющим примерам относятся когерентные структуры в конвекции [Tabeling, 2002], топологическая накачка [Drobyshevski, Yuferev, 1974], турбулентный диамагнетизм [Zeldovich et al., 1983].

Упомянутые выше эффекты демонстрируют накачку полей в физическом пространстве из основного объема в некоторую подобласть этого объема. Если эта область мала, то очевидно, что накачка сопровождается и перераспределением полей в волновом пространстве, например, потоками энергии в этом пространстве, вызванными нелинейными взаимодействиями, α -эффектом в теории средних полей [Krause, Rädler, 1980], разделением по масштабам магнитной спиральности [Brandenburg, Subramanian, 2005; Hejda, Reshetnyak, 2010] в динамо. Отметим, что даже в стационарных системах, когда энергия постоянна, потоки энергии в волновом пространстве существуют, если масштаб впрыска энергии отличается от масштаба диссипации, см. подробнее [Frisch, 1995; Verma, 2004].

Вообще говоря, возможно рассматривать потоки различных величин, но обычно имеют дело с сохраняющимися величинами. Для конвекции это кинетическая энергия и гидродинамическая

спиральность (для трехмерия), и энстрофия (для двумерия). Даже если мы ограничимся только рассмотрением потоков кинетической энергии, направление потока может быть различно и определяться физикой задачи, размерностью пространства и даже геометрией задачи, что мы и исследуем ниже.

Остановимся подробнее на известных свойствах однородной и изотропной турбулентности. Для трех измерений известно, что поток кинетической энергии прямой и локальный, т.е. энергия последовательно передается от больших вихрей к меньшим по масштабу. Для двухмерного же поля скорости направление потока обратное. Особое место занимает так называемая геофизическая конвекция [Pedlosky, 1987], которую отличают силы плавучести и силы Кориолиса, связанные с суточным планетарным вращением. Сочетание этих двух сил и сил диссипации приводит к появлению нового масштаба, определяющего масштаб возникающих циклонов и антициклонов, $l_d \sim E^{1/3}L$, где $E \approx 10^{-15}$ для земного ядра, L — масштаб ядра, [Busse, 1970]. Исходя из модели быстровращающегося слоя есть основания считать [Reshetnyak, Hejda, 2008; 2009], что в таких системах наблюдается как обратный каскад энергии от масштаба l_d в область больших масштабов, так и прямой — от l_d в направлении масштаба диссипации.

Однако если говорить о возможности передачи кинетической энергии от малого масштаба к большому, задача в сферической геометрии принципиально отличается от задачи в плоском слое с периодическими граничными условиями: в сферической геометрии при увеличении интенсивности тепловых источников циклоны начинают осциллировать, приближаясь, удаляясь от оси вращения. Такие осцилляции (волны Россби)

приводят к появлению крупномасштабного вращения циклонов относительно оси вращения, возникновению сильного дифференциального вращения. Направление вращения определяется кривизной внешней оболочки: если при уменьшении расстояния до оси высота циклона увеличивается, то вращение циклонов вокруг оси совпадает с вращением планеты, если же оболочка вогнута и высота уменьшается, то направление вращения противоположно вращению планеты, [Busse, 2002]. Очевидно, что при некотором соотношении параметров возможна ситуация, когда существует два пика в спектре, соответствующие масштабу l_d и масштабу осесимметричного движения циклонов L . Интересно выяснить существует ли нелокальный поток энергии от l_d к L . Ниже мы и рассмотрим эту задачу подробно.

2. УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ

Рассмотрим уравнения конвекции для несжимаемой жидкости ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) во вращающемся вокруг оси z с угловой скоростью Ω сферическом слое ($r_i \leq r \leq r_0$), где (r, θ, φ) – сферическая система координат. Введя следующие единицы измерения для скорости \mathbf{V} , времени t и давления P : κ/L , L^2/κ и $\rho\kappa^2/L^2$, где L – единица длины, κ – коэффициент молекулярной теплопроводности, ρ – плотность вещества, запишем уравнения тепловой конвекции в виде:

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1} \mathbf{E} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} \right) = \\ = -\nabla P - \mathbf{1}_z \times \mathbf{V} + \text{Ra} T r \mathbf{1}_r + \mathbf{E} \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (1) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(T + T_0) = \nabla^2 T. \end{aligned}$$

Безразмерные числа Прандтля, Экмана и Рэлея заданы в виде: $\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$, $\mathbf{E} = \frac{\nu}{2\Omega L^2}$, $\text{Ra} = \frac{\alpha g_0 \delta T L}{2\Omega \kappa}$, где ν – коэффициент кинематической вязкости, α – коэффициент объемного расширения, g_0 – ускорение свободного падения, δT – единица возмущения температуры T относительно равновесного профиля $T_0 = \frac{r_i/r - r_0}{r_0 - r_i}$.

Задача (1) замыкается граничными условиями на $r = r_i, r_0$, полагаемые далее равными 0.35 и 1, как для случая земного ядра. Для возмущений температуры T используются нулевые граничные условия, что в совокупности с заданным выше профилем T_0 , соответствует фиксированным значениям полной температуры $T_0 + T$: (1, 0).

Для поля скорости принимается условие непроникновения $V_r = 0$. Для тангенциальных ком-

понент скорости V_θ, V_φ относительно границ $r = r_i, r_0$ (твердое ядро может вращаться вокруг оси z) используются два вида граничных условий: условие непроскальзывания $V_\theta = V_\varphi = 0$, характерное для твердых границ, либо условие отсутствия касательных напряжений. Такой вид граничных условий заимствован из моделей конвекции звезд, имеющих свободную границу. Для условия непроскальзывания значение угловой скорости вращения ω твердого ядра с моментом инерции $I = \frac{8}{15} \pi r_i^5$ относительно оси z получается из решения уравнения момента импульса с учетом вязких сил, приложенных к твердому ядру:

$$I R \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} = \mathbf{E} \oint \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} r^4 \Big|_{r=r_i} \sin \theta dS, \quad (2)$$

где dS – элемент сферической поверхности на границе твердого ядра.

Уравнения (1), (2) решались численно стандартным разложением по сферическим функциям (в тангенциальном направлении) и полиномам Чебышева (в радиальном направлении). Поле скорости предварительно раскладывалось на полоидальную и тороидальную компоненты. Детали численной реализации кода на параллельных процессорах можно найти в [Решетник, 2011]. В расчетах использовались сетки 128^3 .

3. КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКАЯ КОНВЕКЦИЯ

Быстрое вращение весьма распространенное явление в геофизике. В физическом пространстве вращение приводит к появлению вытянутых вдоль оси вращения циклонов, отличающих данный вид конвекции от конвекции без вращения, где после осреднения доминирующие силы плавучести (и диссипации), а также все физические поля, оказываются сферически симметричными, см. рис. 1. Для случая с вращением известно, что сами циклоны вращаются вокруг собственной оси так, что существует корреляция между их вращением и вертикальным движением жидкости. Последнее выражается в появлении средней гидродинамической спиральности течения $\chi = \langle \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{V} \rangle$, где \mathbf{V} – скорость течения. Для небольших Ra в северном полушарии χ отрицательна, а в южном – положительна. Увеличение Ra приводит к смещению конвекции из внешней части жидкого ядра, внутрь Тейлоровского цилиндра (ТЦ) (область над/под твердым ядром), рис. 2, см. также [Решетник, 2010]. В этом случае χ имеет более сложную структуру, меняя знак в каждом из полушарий: с положительного вблизи границы с твердым ядром, на отрицательный вблизи внешней границы сферы. Отметим, что дипольная симметрия χ относительно экватора сохраняется. Более подробную информацию о поведении χ в зависимости от

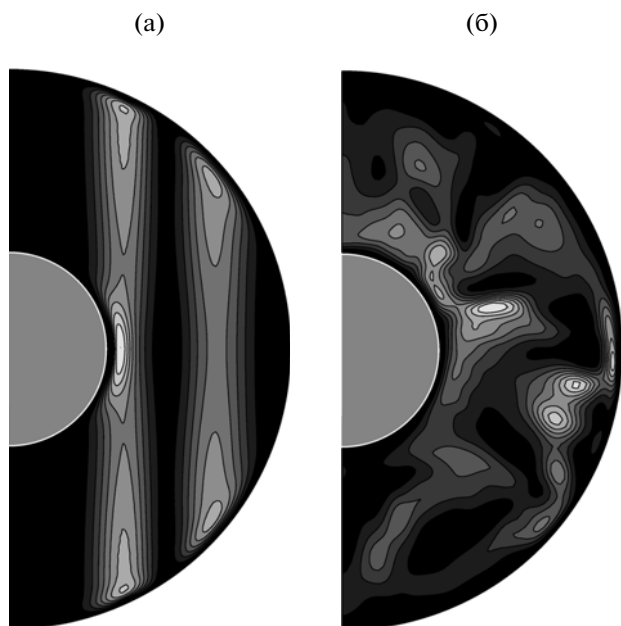


Рис. 1. Меридиональное сечение кинетической энергии E_K для а) $E = 2 \times 10^{-4}$, $Pr = 1$, $Ra = 40$, $Re \sim 17$, $(0, 60)$ с вращением и б) $E = 1$, $Pr = 1$, $Ra = 2.5 \times 10^6$, $Re \sim 3.4 \times 10^2$, $(0, 5 \times 10^4)$ без вращения. Числа в скобках соответствуют диапазону значений полей.

числа Прандтля и учетом магнитного поля можно найти в [Sreenivasan, Davidson, 2008]. Отметим лишь, что с точки зрения динамики средних по-

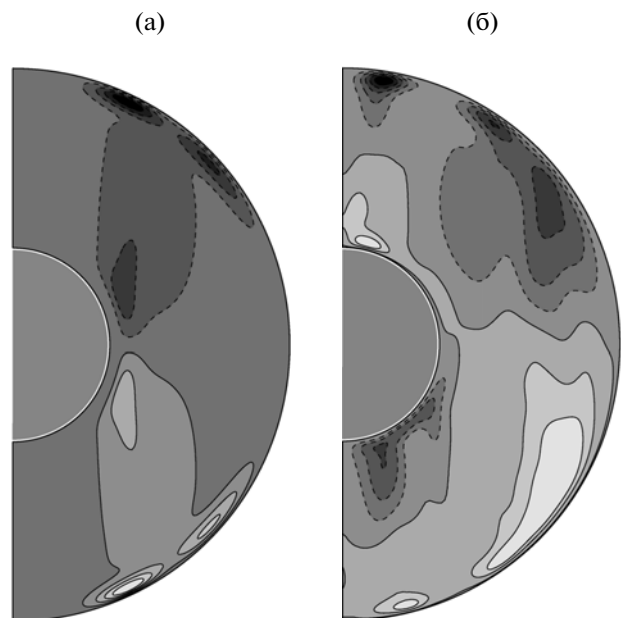


Рис. 2. Меридиональное сечение средней гидродинамической спиральности χ for $E = 2 \times 10^{-4}$, $Pr = 1$, а) $Ra = 40$, $Re \sim 17$, $(-1.2 \times 10^3, 1.2 \times 10^3)$ и б) $Ra = 4 \times 10^2$, $Re \sim 2 \times 10^2$, $(-3 \times 10^5, 3 \times 10^5)$. Пунктир соответствует отрицательным значениям.

лей χ внутри ТЦ и вне его имеют разную природу: вне ТЦ спиральность создается мелкомасштабными (в горизонтальном направлении) циклонами, много меньшими масштаба L , и требуемое теорией средних полей разделение по масштабам при осреднении [Krause, Radler, 1980] хорошо выполняется. Внутри же ТЦ источником χ является крупномасштабное дифференциальное вращение, и корректного разделения по масштабам нет.

4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Как следует из предыдущего параграфа, вращение приводит к появлению малого масштаба в горизонтальной плоскости. Ниже мы рассмотрим спектральные характеристики в азимутальном направлении, введя одномерный спектр $S(m)$ поля $F(r, \theta, \varphi)$; $S(m) = \iint f(m) \overline{f(m)} r^2 \sin \theta dr d\theta$, где f – Фурье преобразование F вдоль координаты φ , а \overline{f} – комплексно-сопряженное значение f . Спектры для трех модельных режимов представлены на рис. 3. Вблизи порога возникновения конвекции наблюдается пик в спектре ($m = 3$), соответствующий масштабу колонки. Увеличение Ra приводит к заполнению провала в спектре в области малых m , и превращению пилообразного спектра в гладкую кривую. Наклон спектра для режима с вращением более пологий, чем для случая без вращения, поскольку вращение приводит к блокированию переноса энергии по спектру.

Для анализа механизма передачи энергии по спектру воспользуемся техникой, изложенной в [Frisch, 1995; Verma, 2004]. Основная идея состоит в том, чтобы выделить в волновом пространстве сферу радиуса M и записать уравнение для кинетической энергии $E_K^<(M)$ в этой сфере, которое включает интегральный поток энергии из внешней области с $m > M$. Точное выражение для потока имеет вид: $\Pi(M) = -E Pr^{-1} [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] \cdot \mathbf{V}^<$, где $\mathbf{V}^<$ означает отфильтрованное поле скорости, для которого высокочастотные гармоники $m > M$ равны нулю. Согласно нашим оценкам [Hejda, Reshetnyak, 2009] для плоского слоя полный поток $\Pi(k)$, где $k = |\mathbf{k}_x + \mathbf{k}_y + \mathbf{k}_z|$, определяется своей горизонтальной компонентой $\Pi(k_{\perp})$ с $k_{\perp} = |\mathbf{k}_x + \mathbf{k}_y|$. Это является причиной, почему мы рассматриваем ниже только зависимость по m .

Все кривые на рис. 4 удовлетворяют условию $\Pi = 0$ для больших M , обеспечивая выполнение закона сохранения энергии конвективным членом в уравнении Навье–Стокса. Для случая без вращения поток Π отрицателен: большие масштабы питают энергией малые. Для небольших M наклон кривой постоянен, что означает нелокальность переноса энергии. Аналогичная ситуация наблюдается для больших M , для которых Π

увеличивается, но наклон также остается постоянным. Наличие нелокальности отличает полученное решение от полученного в плоской геометрии [Reshetnyak, Hejda, 2008; Hejda, Reshetnyak, 2009].

Для геострофической конвекции при малых Ra мы наблюдаем обратный каскад энергии для $M = 0 \dots 2$, $\Pi > 0$. Излом кривой при $M = 3$ связан с провалом в спектре, когда вся энергия оказывается сосредоточенной внутри сферы радиуса M и $\Pi = 0$. Увеличение Ra снижает относительный поток энергии в направлении осесимметричной моды в два раза. Для больших M Π меняет знак, что означает смену обратного каскада для $M < 3$ на прямой каскад для $M > 3$.

Вращение меняет не только направление передачи энергии по спектру, но и строение треугольника в волновом пространстве, возникающего при взаимодействии мод $m = P$ и $m = Q$, приводящих к образованию моды $m = K$. Для последующего анализа введем поток энергии от моды P к моде K : $T_2(P, K) = -Er^{-1}[(\mathbf{V}(P) \cdot \nabla)\mathbf{V}] \cdot \mathbf{V}(K)$ ¹. Удобно представить T_2 как функцию от $K - P$, см. рис. 5. Наблюдается явное наличие нелокального переноса энергии для малых Ra с учетом вращения. Сдвиг экстремумов относительно нулевого значения аргумента соответствует степени нелокальности переноса энергии, обратим внимание на существование периода $m = 3$ и в спектре. Отрицательное значение в T_2 означает обратный каскад энергии. Увеличение Ra приводит к нерегулярному поведению T_2 . Аппроксимация функции выявляет наличие обратного каскада и нелинейного переноса. Сравнение сферической геометрии и плоской демонстрирует преобладание нелокального переноса в первой из них. Причин тому как минимум несколько: плоская геометрия дает лучшее разрешение масштабов и полученные там колонки в два раза тоньше, чем в сферической геометрии. Последнее дает большее количество колонок и, как следствие, лучшую статистику при получении осредненных потоков и формированию инерционных интервалов. Улучшению статистики в плоской геометрии служит еще и тот факт, что количество колонок в плоской геометрии пропорционально k_{\perp}^2 , в то время как для сферической геометрии, в силу концентрации колонок вблизи ГЦ, их число существенно меньше. В тоже время, мы подчеркиваем, что наличие нелокальной передачи энергии к моде $m = 0$ является отличительной чертой сферической геометрии, и хорошо согласуется с известным вращением колонок вокруг географической оси, наблюдаемом в трехмерных вычислениях, и имеющее простое физическое объяснение [Busse, 2002].

¹ Как следует из определения, T_2 антисимметричная функция.

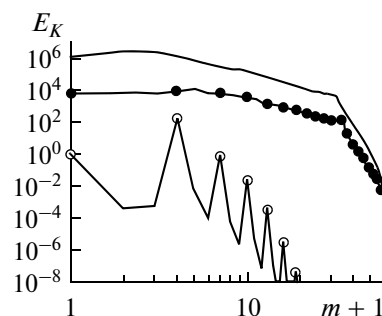


Рис. 3. Спектр кинетической энергии как функция азимутального волнового числа m с вращением для $Ra = 40$ (белые кружочки) и без вращения для $Ra = 800$ (черные кружочки) и $Ra = 2.5 \times 10^6$ (сплошная линия), значение умножено на 10^2 . Значение по m сдвинуто на единицу так, что $m + 1 = 1$ соответствует осесимметричной моде. Тонкая линия соответствует аппроксимации многочленом 5-ого порядка.

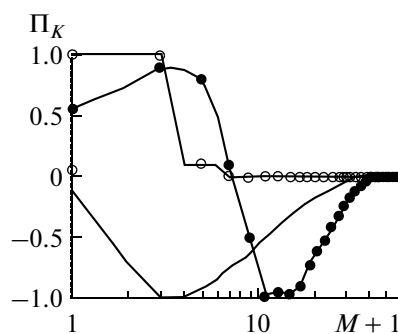


Рис. 4. Нормированный интегральный поток Π_K кинетической энергии как функция азимутального волнового числа для трех режимов (см. обозначения на рис. 3).

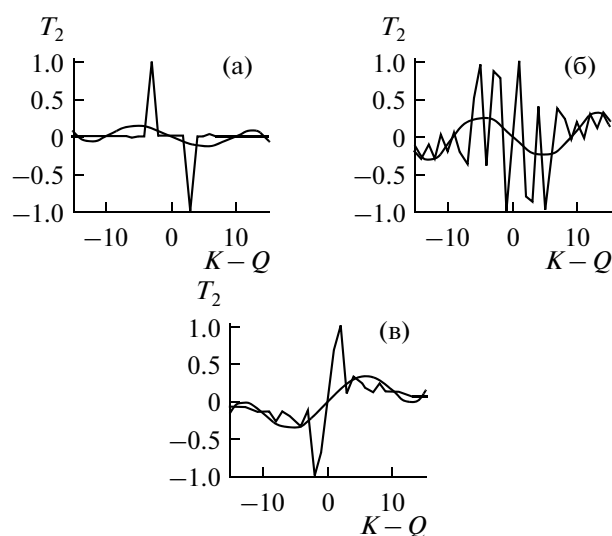


Рис. 5. Нормированные потоки кинетической энергии $T_2(K - P)$ для трех режимов на рис. 3, рис. 4.

5. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Выше мы рассмотрели типичные режимы тепловой конвекции, традиционно используемые в моделях планетарного динамо, на языке, привычном для специалистов теории турбулентности. Даже для квазистационарных в физическом пространстве режимов существуют потоки энергии в волновом пространстве, при условии что конвекция не локализована в волновом пространстве. Вычисления демонстрируют, что для типичных сеток, используемых в моделях геодинamo роль нелокального переноса энергии по спектру весьма велика даже без учета вращения. В моделях с вращением мы наблюдаем обратный каскад энергии к первым азимутальным модам. Это дает нам основание интерпретировать вращение циклонов вокруг оси вращения как результат обратного каскада кинетической энергии. Данное явление не имеет аналога в плоской геометрии, где вращение наоборот разрушает вращающиеся валы, см. подробнее о неустойчивости Купера–Лортца в [Kürpers, Lortz, 1969; Jones, Roberts, 2000]. В этом смысле, обычно используемые в плоской геометрии периодические граничные условия в горизонтальном направлении, соответствуют значениям нулевой кривизны, см. подробнее [Busse, 2002].

Как следует из приведенных расчетов, степень локальности переноса энергии по спектру увеличится с увеличением разрешения численных моделей, однако механизм возбуждения осесимметричного течения останется прежним. Полученные результаты могут быть также интересны для моделей солнечного динамо, где роль вращения хоть и не так велика как в планетарных ядрах, но все же оказывает существенное влияние на потоки в волновом пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Решетник М.Ю.* Тейлоровский цилиндр и конвекция в сферической оболочке // Геомагнетизм и Аэронавигация. 2010. Т. 50. № 2. С. 273–283.
- Решетник М.Ю.* Псевдоспектральный метод в моделях тепловой конвекции во вращающейся сферической оболочке для параллельных компьютеров. Вычислительные методы и программирование. Новые вычислительные технологии. 2011. Т. 12. С. 77–84.
- Brandenburg A., Subramanian K.* Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory // Phys. Rep. 2005. V. 417. P. 1–209.
- Busse F.H.* Thermal instabilities in rapidly rotating systems // J. Fluid Mech. 1970. V. 44. P. 441–460.
- Busse F.H.* Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamo action // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 4. P. 1301–1314.
- Drobyshevski E.M., Yuferev B.S.* Topological pumping of magnetic flux by three-dimensional convection // J. Fluid Mech. 1974. V. 65. P. 33–44.
- Frisch U.* Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge University Press. 1995. 296 p.
- Hejda P., Reshetnyak M.* Effects of anisotropy in the geostrophic turbulence // Phys. Earth Planet. Int. 2009. V. 177. P. 152–160.
- Hejda P., Reshetnyak M.* Nonlinearity in dynamo // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. 2010. V. 104. № 6. P. 25–34.
- Jones C.A., Roberts P.H.* Convection Driven Dynamos in a Rotating Plane Layer // J. Fluid Mechanics. 2000. V. 404. P. 311–343.
- Krause F., Rädler K.-H.* Mean field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Berlin: Akademie-Verlag. 1980. 271 p.
- Küppers G., Lortz D.* Transition from laminar convection to thermal turbulence in a rotating fluid layer // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 609–620.
- Pedlosky J.* Geophysical Fluid Dynamics. NY: Springer-Verlag. 1987. 720 p.
- Reshetnyak M., Hejda P.* Direct and inverse cascades in the geodynamo // Nonlin. Processes Geophys. 2008. V. 15. P. 873–880.
- Sreenivasan B., Davidson P.A.* On the formation of cyclones and anticyclones in a rotating fluid // Phys. Fluids. 2008. V. 20. P. 085104-1–085104-11.
- Tabeling P.* Two-dimensional turbulence: a physicist approach // Phys. Reports. 2002. V. 362. P. 1–62.
- Verma M.* Statistical theory of magnetohydrodynamic turbulence: recent results // Phys. Reports. 2004. V. 401. P. 229–380.
- Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D.* Magnetic fields in astrophysics. NY: Gordon and Breach. 1983. 315 p.