

УДК 550.383

ПЛАНЕТАРНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМО

© 2014 г. М. Ю. Решетняк

Институт физики Земли РАН, Москва

Поступила в редакцию 23.07.2012

Используя Лагранжев подход, автор рассмотрел временную эволюцию ансамбля взаимодействующих между собой магнитогидродинамических циклонов, подчиняющихся уравнениям ланжевеновского типа, во вращающейся среде. Задача актуальна для быстровращающихся конвективных объектов: ядер планет и ряда звезд, где числа Россби много меньше единицы, и наблюдается геострофический баланс сил. В работе приведены результаты моделирования как для двумерного случая, когда оси циклонов могут вращаться только в вертикальной плоскости, так и для трехмерного случая, когда оси вращаются по двум углам. Показано, что изменение теплового потока на границе оболочки влияет на частоту инверсий среднего дипольного магнитного поля, что согласуется с результатами моделирования в трехмерных моделях планетарного динамо. Рассмотрены приложения модели для планет гигантов и предложено объяснение некоторых эпизодов геомагнитного поля в прошлом.

DOI: 10.7868/S0320930X14030049

ВВЕДЕНИЕ

Генерация магнитных полей является предметом изучения теории динамо, суть которой состоит в объяснении последовательного превращения тепловой и гравитационной энергии, связанной с дифференциацией вещества, в энергию кинетических движений проводящей жидкости и последующее превращение кинетической энергии в энергию магнитного поля (Rudiger, Hollerbach, 2004). Современные модели динамо включают в себя уравнения в частных производных конвекции и генерации магнитного поля, которые в силу ряда ограничений должны быть трехмерными. Обычно точность наблюдений внутреннего магнитного поля астрофизических объектов не превышает первого десятка гармоник в разложении по сферическим функциям. Так, для Земли сферические гармоники с номерами, большими 13, экранируются слоем проводящей мантии. Для других объектов точность измерений еще хуже. В то же время для выдерживания правильного баланса сил в моделях необходимо разрешение малых масштабов, связанных как с большими числами Рейнольдса (для Земли $Re \sim 10^8$), так и с возникновением циклонической конвекции с малыми горизонтальными масштабами. Анизотропия течений в жидких ядрах вызвана быстрым планетарным вращением, приводящим к появлению геострофического баланса сил: баланса градиента давления и силы Кориолиса (Pedlosky, 1987). Конвекция в ядрах планет имеет циклонический характер. Сами циклоны и антициклоны вытянуты вдоль оси вращения, а их диаметр много меньше их длины.

Циклоническая конвекция является источником средней гидродинамической спиральности, имеющей принципиальное значение для генерации крупномасштабных магнитных полей в планетарных ядрах. Поскольку вычисление турбулентных коэффициентов переноса для высокоанизотропных сред (Hejda, Reshetnyak, 2009) является лишь предметом будущих исследований, то к анализу уже имеющихся результатов численного моделирования следует подходить очень осторожно.

Для того чтобы хоть как-то приблизиться к требуемому режиму в жидком ядре, необходимо использование моделей с сетками 128^3 и выше, и для получения даже небольшого количества инверсий вычисления занимают месяцы, поскольку магнитные времена существенно больше гидродинамических и требуется длительный счет для получения необходимой статистики инверсий. Пространственное же разрешение имеющихся геомагнитных наблюдений уже на нескольких характерных магнитных временах в прошлое не превышает первых гармоник в разложении по сферическим функциям, т.е. сравнение высокоточных численных моделей с наблюдениями является неоднозначным.

Несмотря на упомянутые технические сложности, современным моделям динамо удается воспроизводить многие черты современного и палеомагнитного поля, в том числе инверсии геомагнитного поля, когда магнитный диполь меняет свою полярность, см. подробнее (Jones, 2011). Очевидно, что при наличии сложных трехмерных моделей, дающих детальную пространственно-

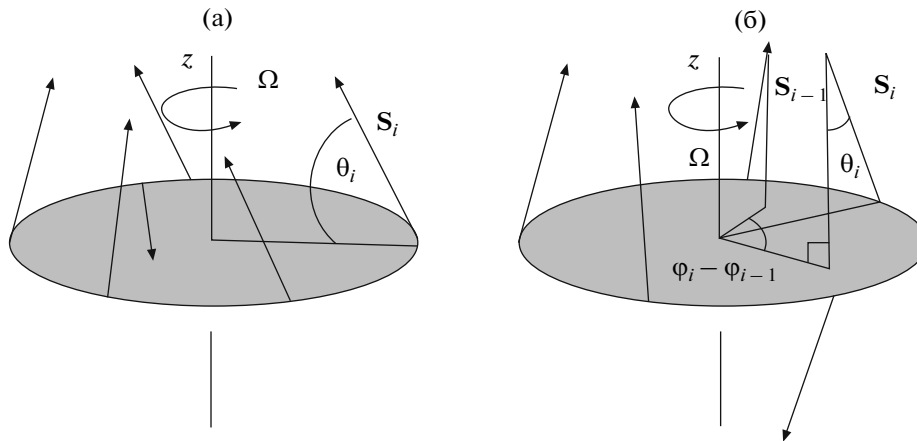


Рис. 1. Спины расположены на окружности и могут изменять угол относительно оси z . (а) Спины могут изменять направление в меридиональной плоскости, направление спина S_i задано углом θ_i ; (б) спины вращаются в пространстве, направление спина S_i задано двумя углами θ_i, φ_i .

временную структуру физических полей в жидком ядре и на поверхности планет, хотелось бы иметь в своем распоряжении и простые модели, позволяющие воспроизводить основные черты геомагнитного поля в прошлом на больших временах. Данные модели должны основываться на современном представлении о циклонической конвекции в жидком ядре и давать сходную картину эволюции магнитного диполя. Для это цели мы рассмотрим модель домино, предложенную в (Nakamichi и др., 2012; Mori и др., 2013), являющуюся развитием уже известных спиновых моделей, см. подробнее об использовании моделей домино в других областях физики (Stanley, 1971). Суть модели состоит в том, чтобы представить магнитное поле планеты в виде суперпозиции магнитных полей отдельных спинов, имеющих постоянную амплитуду и закрепленных на окружности единичного радиуса. Спины могут менять угол по отношению к оси z , проходящей через центр данной окружности и перпендикулярной плоскости окружности. Далее ось z будет совпадать с осью вращения всей системы в целом. Спины взаимодействуют между собой так, что минимальная энергия взаимодействия соответствует сонаправленным спинам. Вращение системы приводит к появлению предпочтительного направления спинов вдоль оси вращения, задаваемого введением потенциала в систему. Ниже мы сначала рассмотрим, как система таких спинов, поворачивающихся в вертикальной плоскости, может быть использована для объяснения существования тепловых ловушек магнитного поля, когда флуктуации теплового потока запирают магнитный диполь вблизи полюсов (режим редких инверсий геомагнитного поля), или вблизи экватора (магнитное поле Нептуна и Урана). Далее мы приведем обобщение данного подхода на случай трехмерия, когда направление спинов определяется двумя перемен-

ными во времени углами и возможна прецессия диполя вокруг географической оси.

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДОМИНО

Рассмотрим модель домино (Nakamichi и др., 2012), являющуюся развитием XY-моделей Изинга–Гайзенберга взаимодействующих магнитных спинов (см. подробнее классификацию и терминологию в (Stanley, 1971)). Идея модели домино сводится к рассмотрению системы N взаимодействующих двумерных спинов $S_i, i = 1 \dots N$, во вращающейся среде с угловой скоростью $\Omega = (0, 1)$. Спины расположены равномерно по единичной окружности и могут менять во времени t угол θ относительно оси вращения, перпендикулярной плоскости окружности так, что $S_i = (\sin \theta_i, \cos \theta_i)$ (см. рис. 1а). На каждый спин S_i действуют случайная сила, трение, а также сила со стороны двух ближайших соседей S_{i-1} и S_{i+1} .

Прототипом спинов являются магнитные поля, генерируемые циклонической конвекцией. Согласно аналитическим оценкам (Busse, 1970) и трехмерным моделям геодинamo (Jones, 2000), конвективные ячейки в жидком ядре вытянуты вдоль оси вращения и вращаются вокруг своей собственной оси вращения, параллельной оси вращения всей системы, так что их спиральность оказывается разного знака в разных полушариях. Если конвекция достаточно интенсивна, то такая система может генерировать магнитное поле. Возникающее магнитное поле слабо меняет форму течений (Jones, 2000). Для наблюдателя, находящегося сравнительно далеко от объема генерации (на Земле – это на расстоянии мантии), доступна лишь осредненная картина, воспринимаемая как осесимметричный магнитный диполь.

Для вывода динамических уравнений воспользуемся лагранжевым подходом. Лагранжиан системы равен сумме лагранжианов отдельных спинов. Запишем лагранжиан i -го спина в виде $\mathcal{L}_i = K_i - U_i$, где $K_i = \frac{1}{2}\dot{\theta}_i^2$ – кинетическая энергия спина, $U_i = \lambda[(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}) + (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i-1})] + \gamma(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S}_i)^2$ – потенциальная энергия спина, включающая взаимодействие с соседними спинами и эффект вращения, сводящийся к стремлению спина расположиться вдоль оси вращения, γ, λ – константы.

Рассмотрим уравнения Лагранжа для переменных $(\theta, \dot{\theta})$, добавив диссипативную функцию

$$\mathcal{F}_i = \frac{\kappa}{2}\dot{\theta}_i^2 \text{ и источник энергии } \mathcal{R}_i = \theta_i \frac{\epsilon\chi_i}{\sqrt{\tau}}:$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial \dot{\theta}_i} + \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial \theta_i} = 0, \quad (1)$$

где κ, ϵ, τ – постоянные параметры, χ – случайная функция. Подставляя значения $\mathcal{L}_i, \mathcal{F}_i$ и \mathcal{R}_i в (1), получаем систему уравнений ланжевенского типа:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_i - 2\gamma \cos \theta_i \sin \theta_i + \lambda[\cos \theta_i(\sin \theta_{i-1} + \sin \theta_{i+1}) - \\ - \sin \theta_i(\cos \theta_{i-1} + \cos \theta_{i+1})] + \kappa\dot{\theta}_i + \frac{\epsilon\chi_i}{\sqrt{\tau}} = 0, \quad (2) \\ \theta_0 = \theta_N, \quad \theta_{N+1} = \theta_1, \quad i = 1 \dots N. \end{aligned}$$

Система нутационных уравнений (2) описывает эволюцию углов отклонения θ_i спинов во времени относительно оси вращения в форме второго закона Ньютона с периодическими граничными условиями. Суммарному аксиальному диполю будет соответствовать величина

$$M = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos \theta_n. \quad (3)$$

В работе (Nakamichi и др., 2012) для решения системы (2) использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка точности. Наши численные эксперименты показали, что уже использование стандартных явных схем второго и первого порядка для второй и первой производных по времени в (2) и взятой с предыдущего шага по времени нелинейной правой части, дает близкие результаты. В дальнейшем мы рассмотрим и более сложный численный метод.

Интегрируя по времени (2), уже при небольших $N = 8$ удается получить весьма разнообразную динамику поведения M , близкую в ряде случаев к палеомагнитным наблюдениям геомагнитного диполя, включающую как периоды редких инверсий поля, так и частых (Jacobs, 2005). Рассмотрение поведения во времени индивидуальных спинов в модели домино указывает на лавинообразное перевертывание спинов, приводящее

к инверсии поля, что и определило название модели. Все расчеты проведены для близких к предложенным в (Nakamichi и др., 2012) значениям параметров $\gamma = -1, \lambda = -2, \kappa = 0.1, \epsilon = 0.65, \tau = 10^{-2}, N = 8$, со случайным χ_i , распределенным по нормальному закону, с нулевым средним и единичной дисперсией, и обновляемым на каждом временном шаге, равном τ . Исследования показывают, что результаты слабо зависят от выбора формы случайного шума χ , и остальные параметры могут быть легко подобраны для достижения сходимости с наблюдениями. Характерное поведение аксиального диполя магнитного поля представлено на рис. 2а, где наблюдается несколько нерегулярных во времени инверсий поля на интервале времени ~ 25 млн лет (см. оценки характерных времен в (Nakamichi и др., 2012)). Процесс сопровождается короткими падениями амплитуды M до нулевого уровня и последующими быстрыми восстановлениями амплитуды, хорошо известными наблюдателям и именуемыми в геомагнетизме экскурсами геомагнитного поля.

Эксперсы иногда еще называют неудавшимися инверсиями поля. Детальный анализ и зависимость решения системы (2) от параметров можно найти в (Nakamichi и др., 2012), ограничимся лишь следующим замечанием. До настоящего времени из наблюдений нет ясного понимания, как происходит инверсия магнитного поля. Существует два сценария инверсий: магнитный диполь производит вращение на 180° без уменьшения амплитуды, или сначала уменьшается по величине, а потом совершает переворот и восстанавливает прежнее значение амплитуды. Для проверки этих двух сценариев рассмотрим эволюцию отдельных спинов во время инверсии (рис. 3). В момент инверсии $M = 0$ наблюдается большой разброс отдельных спинов, что приводит к уменьшению M . Отметим, что характерное время инверсии много больше временного шага в модели. Минимальное время $\sim N\tau/2$ распространения возмущения от спина \mathbf{S}_i до максимально удаленного другого спина также меньше времени инверсии. Полученный результат согласуется с результатами трехмерных вычислений, в которых наблюдается сосуществование пятен радиального магнитного поля разной полярности во время инверсий. Ниже мы вернемся к этому вопросу при рассмотрении трехмерной модели домино.

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА

Величина теплового потока является важнейшим параметром теории динамо. Увеличение потока приводит к появлению тепловой конвекции, а при дальнейшем увеличении интенсивности конвекции – и к генерации магнитного поля, в слу-

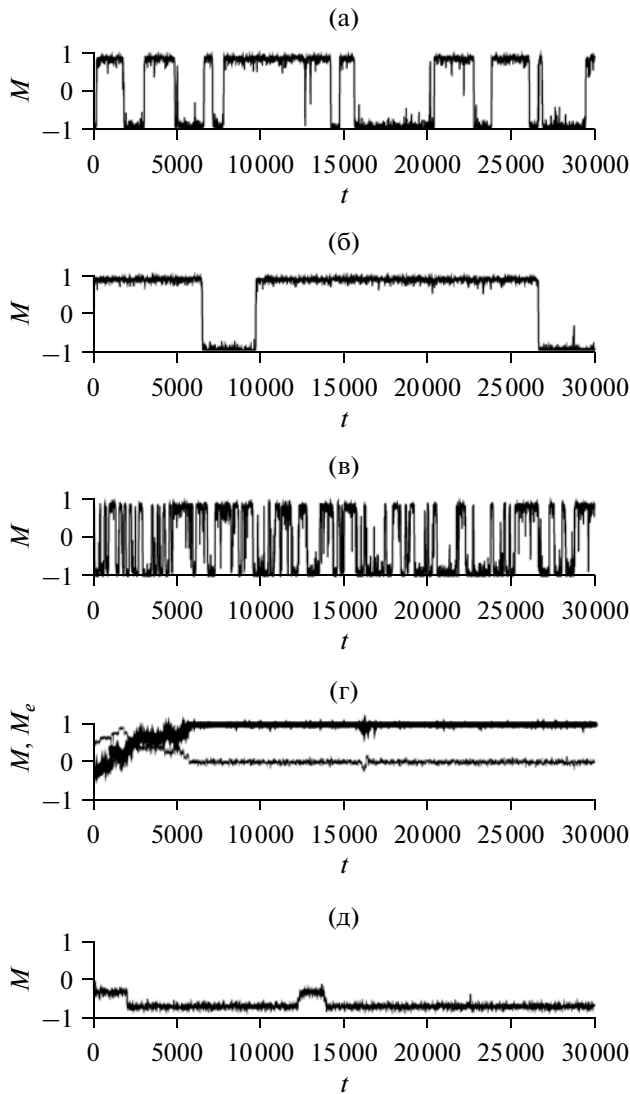


Рис. 2. Эволюция во времени M для $C_\psi = 0$ (а), $C_\psi = 0.5$ (б) и $C_\psi = -0.5$ (в) с $\psi = -\cos^2\theta$, и $C_\psi = 10$ (г) и $C_\psi = -9$ (д) с $\psi = -\cos^2 2\theta$. На рисунке (г) толстая линия соответствует M , а тонкая — M_e . Время безразмерно, интервал времени соответствует 25 млн лет.

чае, если среда проводящая. Известно, что для сферических оболочек при малых числах Россби первой возбуждающейся магнитной модой является диполь, не меняющий полярность. Дальнейшее увеличение сферически-симметричного теплового потока при постоянной скорости вращения оболочки приводит к относительному ослаблению вращения и переходу к режиму хаотичных инверсий. Переход связывают с достижением критического числа Россби $Ro \sim 0.12$ (Christensen, Aubert, 2006).

Одним из важных результатов теории динамо является зависимость числа инверсий магнитного поля от пространственного распределения теп-

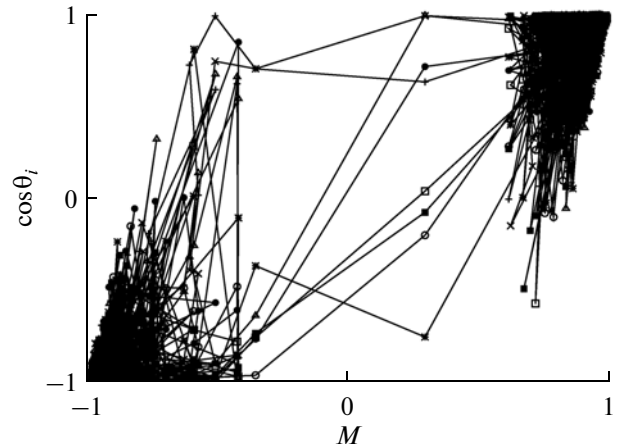


Рис. 3. Зависимость $\cos\theta_i$ для $i = 1 \dots N$ от M для инверсии на рис. 1а на интервале безразмерного времени $t = (1-3) \times 10^3$. Точки на кривых соответствуют каждому 10-му значению в вычислениях.

лового потока на внешней границе жидкого ядра (Glatzmaier и др., 1999). Флуктуации теплового потока на границе, составляющие несколько десятков процентов от его среднего уровня, возникают за счет конвекции в мантии и имеют характерные времена 10^6-10^7 лет, много большие характерных времен процессов в жидком ядре 10^4-10^5 лет. В частности, в работе показано, что увеличение интенсивности теплового потока от экваториальной плоскости вдоль оси вращения к полюсам приводит к увеличению степени осевой симметрии системы в целом и затруднению процесса инверсий. Последнее следует понимать следующим образом. В интервалы времени между инверсиями магнитный диполь находится вблизи географических полюсов. Преобладание выделенного направления связано с единственной причиной — вращением. Силы плавучести приводят к радиальному сферически симметричному распределению полей, поскольку, во-первых, силы плавучести в жидком ядре сами имеют радиальное направление, а во-вторых, при обычно используемых сферически симметричных граничных условиях на границе ядро-мантия и решение стремится к сферически симметричному. Другими словами, если эффективное влияние вращения увеличивается, то следует ожидать уменьшение вероятности смены полярности. Это соответствует результатам трехмерного моделирования при малых числах магнитного Рейнольдса R_m и Экмана E (Christensen и др., 2001). Назовем этот эффект тепловой ловушкой для магнитного диполя. В свою очередь, ослабление теплового потока в высоких широтах приводит к хаотизации движений магнитного диполя и появлению частых инверсий. Последнее связано с нарушением геострофического баланса и преобладанием радиальных сил плавучести. Кажется

заманчивым воспроизвести данный эффект в рамках модели домино, позволяющей получить обширную статистику инверсий и придать большую наглядность результатам.

По аналогии с введением вращения в систему можно ввести потенциал архимедовской силы Ψ , с заданной пространственной зависимостью по углу θ . Сила $F_i = -\frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta_i}$, появляющаяся с обратным знаком в уравнении (2), в отличие от уже имеющегося случайного и не зависящего от угла источника возмущений ϵ (который можно интерпретировать как совокупность всех сферически симметричных сил, включая и архимедовские), будет приводить при соответствующем выборе формы потенциала как к эффективному ослаблению вращения в системе, так и к его усилению. Далее мы рассмотрим влияние этой силы на поведение $M(t)$.

Пусть $\Psi(t, \theta) = C_\psi \psi(t, \theta)$, где C_ψ — константа, а пространственное распределение потенциала задано в виде $\psi = -\cos^2 \theta$. Согласно современным оценкам, флуктуации теплового потока на границе ядро–мантия могут достигать 20% (Olson и др., 2010), что дает характерные значения для $C_\psi \sim 0.2 \frac{\epsilon}{\sqrt{\tau}} \sim 1$. Тогда $C_\psi > 0$ соответствует устойчивому состоянию спинов (циклонов) в области географических полюсов $\theta = 0, \pi$ так, что возникающая сила $F_i = -\sin 2\theta_i$, действующая на циклон, направлена к полюсам. Данный режим сопоставим с повышением теплового потока в области полюсов, что приводит к вытягиванию циклонов вдоль оси вращения (усилению эффекта вращения, см. теорему Тейлора–Праудмана). На рис. 2б–2д показано эффективное влияние тепловой неоднородности на поведение M .

Увеличение теплового потока вдоль оси вращения ($C_\psi > 0$) приводит к частичному подавлению инверсий магнитного поля (рис. 2б). Количество экскурсов магнитного поля также сокращается, поскольку снижается и дисперсия M . Обратим внимание, что для выбранной нами формы потенциального барьера ψ , зависимость для F в точности равна зависимости члена при γ в (2): увеличение теплового потока на полюсах приводит к эффективному усилению геострофии, вызванной быстрым суточным вращением, что соответствует физике процесса. Полученный нами результат хорошо согласуется с трехмерными вычислениями, см. рис. 1д в (Glatzmaier и др., 1999). Дальнейшее увеличение амплитуды барьера при $C_\psi \sim 2$ приводит к полному прекращению инверсий. Увеличением амплитуды барьера до значений $C_\psi \sim 10$ можно добиться состояний, когда M , оставаясь практически неизменным во времени, будет иметь произ-

вольное значение $|M| \leq 1$, определяемое начальным распределением S_i , процесс сопровождается уменьшением дисперсии M . Другими словами, повышенный тепловой поток приводит к фиксации некогерентных спинов. Согласно наблюдениям (Shatsillo и др., 2005), имеются некоторые свидетельства того, что в прошлом магнитный диполь был как вблизи географических полюсов, что соответствует современному состоянию, так и мог находиться длительное время в низких широтах. Не исключено, что такая миграция могла быть вызвана флуктуациями теплового потока. Далее мы рассмотрим ряд других распределений теплового потока, приводящих к близким результатам.

Для отрицательных C_ψ , при относительном усилении радиальной конвекции в экваториальной области и снижении геострофичности течений, мы получаем обратный эффект (рис. 2в): режим частых инверсий поля, рис. 1с в (Glatzmaier и др., 1999). В этом случае сила F направлена от полюсов и точка равновесия на полюсах является неустойчивой. Появление минимума потенциальной энергии на экваторе приводит к возникновению нового аттрактора, так что, например, для $C_\psi = -5$ $|M| < 0.4$, что соответствует магнитному диполю

$$M_e(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin \theta(t), \quad (4)$$

лежащему в экваториальной плоскости. Подобное поведение магнитного поля наблюдается на Нептуне и Уране, см. подробнее (Cupal и др., 2002).

Рассмотрим $\psi = -\cos^2 2\theta$, для которого сила $F_i = -2 \sin 4\theta_i$ знакопеременна в каждом полушарии, что в (Glatzmaier и др., 1999) соответствует неоднородности, задаваемой зональной сферической гармоникой четвертого порядка P_4^0 , где P_l^m — присоединенный полином Лежандра.

Для $C_\psi > 0$ имеем потенциальный барьер в средних широтах, затрудняющий инверсии магнитного поля, что подтверждается результатами нашего моделирования и результатами трехмерных вычислений, см. рис. 1е в (Glatzmaier и др., 1999). Для $C_\psi = 2$ наблюдалась только одна инверсия магнитного поля. Другим важным моментом является существование устойчивого равновесия на экваторе $\theta = \pi/2$, где $M = 0$. Можно было бы предположить существование режимов, когда спины имеют два аттрактора: один в высоких широтах вблизи одного из полюсов и один — на экваторе. Такой режим действительно имеет место (см. рис. 2г). Обратного перехода от высоких широт к экватору не наблюдалось. Интересно, что в начале вычислений при малых M амплитуда экваториального диполя M_e велика (см. рис. 2г), что

позволяет использовать данный сценарий также для интерпретации магнитных полей на планетах гигантах.

Ограничимся последним примером, когда $C_\psi < 0$. Здесь, дополнительно к аттракторам, находящимся на полюсах (связанным с вращением системы Ω), появляются два аттрактора в средних широтах (по одному в каждом полушарии). Для $C_\psi = -1$ имеем режим частых инверсий поля, наблюдаемый на рис. 1f в (Glatzmaier и др., 1999). Более того, удается получить режимы (см. рис. 2д), когда магнитный полюс большую часть времени находится в высоких широтах, но все же заметно, что $|M| \neq 1$ (частичная синхронизация спинов). Наблюдаются переходы в неустойчивое состояние $M = 0$, соответствующее магнитному диполю в экваториальной плоскости. Обратим внимание, что при уменьшении пространственного масштаба возмущения теплового потока требуемая амплитуда возмущения для возникновения инверсии возрастает.

ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Дальнейшим шагом в развитии модели доминирует ее обобщение на случай трехмерного вращения спинов в пространстве. Новая степень свободы — вращение спина в азимутальном направлении, позволяет воспроизводить в модели как эффект нутации (отклонение спина от оси вращения), так и прецессию — вращение в азимутальном направлении. Формально это приводит к появлению нового эволюционного уравнения для азимутального угла φ . На начальном этапе сила Кориолиса приводит к формированию спина (циклона). Далее ее влияние на спин как целое сводится к созданию предпочтительного направления, так же, как в случае с силой тяжести и вращающимся волчком, с той лишь разницей, что оба направления, Ω и $-\Omega$, оказываются равноправными. Последнее соответствует двум устойчивым состояниям равновесия $\theta = 0$, $\theta = \pi$. Нутацию вызывают случайная сила, сила взаимодействия между спинами и сила вязкости. Прототипом случайной силы в трехмерных моделях является сила плавучести, а силы взаимодействия между спинами — магнитная сила. Ниже мы рассмотрим, как ввести вращение спинов в пространстве, проводя сопоставление полученных уравнений с известными уравнениями для вращающихся тел и магнитных спинов в ферромагнетиках.

В трехмерии направление спина $\mathbf{S}_i = (\sin \theta_i \cos \varphi_i, \sin \theta_i \sin \varphi_i, \cos \theta_i)$ задано двумя углами θ и φ в сферической системе координат. Как и прежде считаем, что центры систем координат расположены равномерно по окружности, лежа-

щей в горизонтальной плоскости, перпендикулярной Ω (см. рис. 1б).

Рассмотрим приближение, когда членами с $\ddot{\theta}$, $\ddot{\varphi}$ можно пренебречь. Далее мы используем тот факт, что для получения прецессионного решения в Лагранжиан следует ввести член, пропорциональный $\dot{\varphi} \cos \theta$, и отбросить члены, квадратичные по скоростям $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$ (Miltat и др., 2002). Тогда Лагранжиан i -го спина имеет вид:

$$\mathcal{L}_i = \dot{\varphi}_i \cos \theta_i - \gamma(\Omega \cdot \mathbf{S}_i)^m - \lambda[(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}) + (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i-1})], \quad (5)$$

где m — целое число. Член, учитывающий взаимодействие между соседними спинами, после преобразований записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i &= \lambda[(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}) + (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i-1})] = \\ &= \lambda[\sin \theta_i (\sin \theta_{i+1} \cos(\varphi_i - \varphi_{i+1}) + \\ &+ \sin \theta_{i-1} \cos(\varphi_i - \varphi_{i-1})) + \cos \theta_i (\cos \theta_{i+1} + \cos \theta_{i-1})]. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее мы ограничимся двумя случаями: $m = 1$, наблюдающийся в ферромагнетиках, когда важно направление внешнего магнитного поля, и спины сонаправлены Ω . Случай $m = 2$ соответствует случаю, когда важна лишь параллельность спина оси Ω . Данный вид предполагает симметрию потенциальной энергии, связанной с вращением, относительно экваториальной плоскости и использовался ранее в двумерном случае (2). Поскольку уравнения динамо симметричны относительно знака магнитного поля, этот случай важен для описания геомагнитного поля. Как мы увидим ниже, первые два члена в правой части (5) при $m = 1$ приводят к уравнению Ландау–Лифшица–Гильберта (ЛЛГ), в котором синхронизация спинов происходит за счет магнитного поля. Третий член описывает локальное взаимодействие соседних спинов.

Запишем уравнения Лагранжа для четырех независимых переменных $(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}_i} + \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\varphi}_i} + \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial \varphi_i} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\mathcal{F}_i = \frac{\kappa}{2}(\dot{\theta}_i^2 + \sin^2 \theta_i \dot{\varphi}_i^2), \quad \mathcal{R}_i = \frac{\epsilon}{\sqrt{\tau}}(\theta_i \chi_i + \varphi_i \psi_i), \quad (8)$$

и ψ — случайная функция.

Подставляя (5) и (8) в (7) для $m = 2$, получаем систему уравнений:

$$\dot{\theta}_i - \kappa \sin \theta_i \dot{\phi}_i - \frac{\mathcal{F}'_{i\phi}}{\sin \theta_i} - \frac{\epsilon \Psi_i}{\sin \theta_i \sqrt{\tau}} = 0, \quad (9)$$

$$\dot{\phi}_i + \kappa \frac{\dot{\theta}_i}{\sin \theta_i} - 2\gamma \cos \theta_i + \frac{\mathcal{F}'_{i\theta}}{\sin \theta_i} + \frac{\epsilon \chi_i}{\sin \theta_i \sqrt{\tau}} = 0,$$

где $\mathcal{F}_i = \lambda[(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}) + (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i-1})]$. Точный вид членов с производными \mathcal{F}_i задан соотношениями:

$$-\frac{\mathcal{F}'_{i\phi}}{\sin \theta_i} = \lambda[\sin \theta_{i+1} \sin(\phi_i - \phi_{i+1}) + \sin \theta_{i-1} \sin(\phi_i - \phi_{i-1})], \quad (10)$$

$$\frac{\mathcal{F}'_{i\theta}}{\sin \theta_i} = \lambda[\text{ctg} \theta_i (\sin \theta_{i+1} \cos(\phi_i - \phi_{i+1}) + \sin \theta_{i-1} \cos(\phi_i - \phi_{i-1})) - (\cos \theta_{i+1} + \cos \theta_{i-1})].$$

Как и прежде в (2), используются периодические граничные условия:

$$\theta_0 = \theta_N, \quad \theta_{N+1} = \theta_1, \quad \phi_0 = \phi_N, \quad \phi_{N+1} = \phi_1, \quad i = 1 \dots N. \quad (11)$$

Поскольку Лагранжиан в форме (5) не учитывает вторых производных и квадратичных членов $\dot{\theta}^2$, $\dot{\phi}^2$, то система (9) представляет собой баланс сил. С точки зрения динамики это выражается в более резком отклике на возмущения, вносимые случайной силой, которые успевают релаксироваться в (2).

Прежде чем перейти к анализу системы (9), рассмотрим случай с $m = 1$, для которого в (9) член $2\gamma \cos \theta$ меняется на γ . Полагая $\lambda = 0$, $\kappa = 0$, $\epsilon = 0$, получаем $\dot{\theta} = 0$ и $\dot{\phi} = -\gamma$, т.е. прецессию вокруг вертикальной оси, что соответствует решению хорошо известного уравнения ЛЛГ без диссипации для ферромагнетиков:

$$\dot{\mathbf{S}}_i = -\gamma \mathbf{S}_i \times \mathbf{\Omega}, \quad (12)$$

имеющего интеграл движения $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S}_i^2 = 0$, и при не зависящем от времени $\mathbf{\Omega}$ еще один интеграл $\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{\Omega}) = 0$, откуда следует $\dot{\theta} = 0$. ϕ -Компонента уравнения (12) дает уже полученное нами ранее эволюционное уравнение для азимутального угла: $\dot{\phi} = -\gamma$. Как уже отмечалось ранее, существование прецессии отличает трехмерный случай от двумерного, где роль вращения сводится к притяжению спинов к полюсам (2). С формальной точки зрения отличие состоит в том, что производная $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$ перешла из эволюционного уравнения для θ в уравнение для ϕ .

Для случая $m = 2$ имеем прецессионные уравнения вида $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = -2\gamma \cos \theta$, предсказывающие инверсию угловой скорости вращения спинов при переходе через экватор. К полученной асимметрии следует относиться следующим образом. Очевидно, что при наличии выделенного направления, связанного с вращением, система несимметрична относительно инверсии координаты $z \rightarrow -z$, и нарушение зеркальной симметрии в случае с $m = 1$ сводится к предпочтительной полярности, т.е. предпочтительному значению угла θ . Для случая же с $m = 2$ мы имеем равновероятное состояние для θ , но асимметрия отражается в смене знака $\dot{\phi}$ при переходе через экватор.

Интересно провести аналогию с соотношением членов в уравнении Навье–Стокса с учетом вращения. Пренебрегая членами с ускорением и пространственными производными, положив радиальную скорость $V_r = 0$, имеем соотношения для V_θ - и V_ϕ -компонент скорости:

$$-V_\phi^2 \text{ctg} \theta = H V_\phi \cos \theta, \quad V_\theta V_\phi \text{ctg} \theta = -H V_\theta \cos \theta, \quad (13)$$

где H — амплитуда силы Кориолиса, а компоненты тангенциальной скорости (V_θ, V_ϕ) выражаются через углы как $(\dot{\theta}, \dot{\phi} \sin \theta)$. Оба соотношения в (13) приводят к $\dot{\phi} = -H$, что соответствует рассмотренному выше случаю с $m = 1$ ¹. Как мы видим, требование равновероятности прямой и обратной полярности, учтенное в случае с $m = 2$, существенно меняет картину.

Вернемся к системе (9) с $m = 2$. Поскольку мы не учитывали квадратичные члены по скоростям, данное приближение справедливо для медленного решения, когда спины прецессируют вокруг оси вращения и не испытывают резких перемещений, поэтому ее использование для анализа инверсий не представляет интереса. Для этой цели далее мы рассмотрим полные уравнения с учетом квадратичных членов. А пока рассмотрим, как влияние случайной силы влияет на предсказанную асимметрию прецессии в разных полушариях.

Заметим, что мы уже имеем дело с двумя сопряженными уравнениями, требующими учета баланса “энергии” между уравнениями и использования методов, повышающих устойчивость решения, поскольку появились члены с $\sin \theta$ в знаменателе, обращаемся в ноль на оси. Для этой цели мы используем уравнения в “остаточной” форме (residual form) и применим метод Ньютона–Рапсона для решения системы нелинейных уравнений, см. Приложение А.

На рис. 4а показана фазовая диаграмма зависимости скорости прецессии V_ϕ от полярности

¹ Значение V_θ остается неопределенным.

диполя M для последовательности инверсий на рис. 4б. Очевидно, что введение случайной силы устраняет асимметрию, имеющуюся при отсутствии диссипации и внешних сил. Как мы видим, азимутальные скорости могут быть весьма велики, выводя модель за пределы сделанных предположений при выводе уравнений. Однако на наш взгляд рассмотренное выше прецессионное приближение весьма поучительно с точки зрения проведения аналогии с уравнением ЛЛГ для ферромагнетиков, где при температурах ниже точки Кюри $\dot{\theta}$ мало. Аналогичное приближение используется и в астрономии, где эффекты нутации могут быть также весьма малы.

Рассмотрим случай, когда $\ddot{\theta}$ и $\ddot{\phi}$ не равны нулю. Воспользуемся аналогией с вращающимся волчком с единичными моментами инерции (Ландау, Лифшиц, 1988), записав лагранжиан в виде:

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_i^2 + \sin^2 \theta_i \dot{\phi}_i^2 + (\dot{\phi}_i \cos \theta_i + \dot{\zeta}_i)^2) - \gamma(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{S}_i)^2 - \mathcal{F}_i, \quad (14)$$

где $\dot{\zeta}_i$ – угловая скорость вращения волчка. Аналогия со спиновой моделью состоит в том, что $\dot{\zeta}$ является заданной постоянной величиной, являющейся характеристикой объекта. Для удобства примем ее равной единице: $\dot{\zeta}_i^2 \equiv |\mathbf{S}_i|^2 = 1$. Тогда после упрощения имеем:

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2}\dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_i^2 + \dot{\phi}_i \cos \theta_i - \gamma \cos^2 \theta_i - \mathcal{F}_i, \quad (15)$$

где отброшена постоянная, поскольку в уравнение Лагранжа входят лишь производные от \mathcal{L} . При отбрасывании квадратичных по скоростям членов в (15) приходим к использованной ранее упрощенной форме лагранжиана (5).

Подставляя (14) в (7), приходим к динамическим уравнениям вида:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_i + \dot{\phi}_i \sin \theta_i - \gamma \sin 2\theta_i + \mathcal{F}'_{i\theta} + \kappa \dot{\theta}_i + \frac{\epsilon \chi_i}{\sqrt{\tau}} &= 0, \\ \ddot{\phi}_i - \sin \theta_i \dot{\theta}_i + \mathcal{F}'_{i\phi} + \kappa \sin^2 \theta_i \dot{\phi}_i + \frac{\epsilon \psi_i}{\sqrt{\tau}} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Простой проверкой убеждаемся, что, отбрасывая вторые производные по времени, получаем систему (9). Обратим внимание, что задача со спином и волчком отличается от гидродинамической задачи тем, что сила Кориолиса в (16) (член с γ) присутствует лишь в одном из уравнений. Это означает, что, в отличие от гидродинамических уравнений, где сила Кориолиса не вносит энергию в систему, в нашем случае работа этой силы $\sim -\theta \gamma \sin 2\theta$, и вообще говоря, не равна нулю. Конечно же, это связано с тем, что в модели домино влияние вращения на циклон как целое анало-

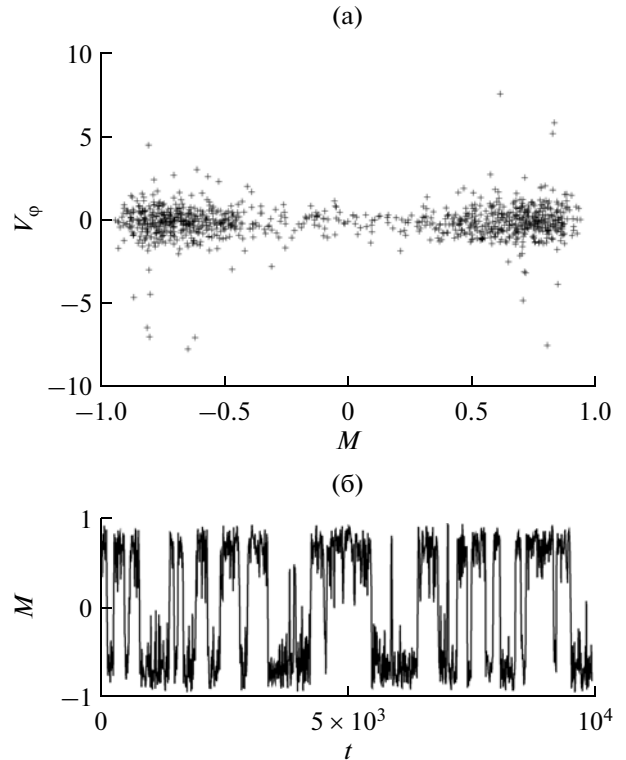


Рис. 4. Для $\gamma = -1.8$, $\lambda = -6$, $\kappa = 0.1$, $\epsilon = 0.17$, $\tau = 0.01$: (а) зависимость безразмерной скорости прецессии V_ϕ от полярности диполя $-M$; (б) эволюция диполя M во времени. Время безразмерное.

гично роли силы тяжести в модели быстро вращающегося волчка.

Численный метод решения системы (16) рассмотрен в Приложении В.

На рис. 5а представлен модельный ряд из 30 инверсий магнитного поля. Считая характерное время t_i между инверсиями равным 3×10^5 лет, имеем длину всего интервала 9×10^6 лет и единицу времени $\tau_u = 3 \times 10^5 / 2 \times 10^4 = 4 \times 500$ лет. Оценка средней азимутальной скорости $V_\phi = 0.2$ приводит по порядку величины к характерной археомагнитной оценке времени блуждания магнитного полюса вокруг географического полюса: $\tau_a = \frac{\pi}{8} \frac{1}{V_\phi} \tau_u \sim 3500$ лет, где мы учли, что во времена между инверсиями полюс находится в конусе $\theta < \frac{\pi}{8}$. Отношение $2 \frac{\gamma \sqrt{\tau}}{\epsilon} \sim 1$ соответствует балансу силы Кориолиса и флуктуационного члена, соответствующего, например, силе Архимеда.

Рассмотрим важный для геомагнетизма вопрос предсказания инверсий геомагнитного поля по изменению вариаций поля перед инверсией (Jacobs, 2005). В качестве меры вариаций примем

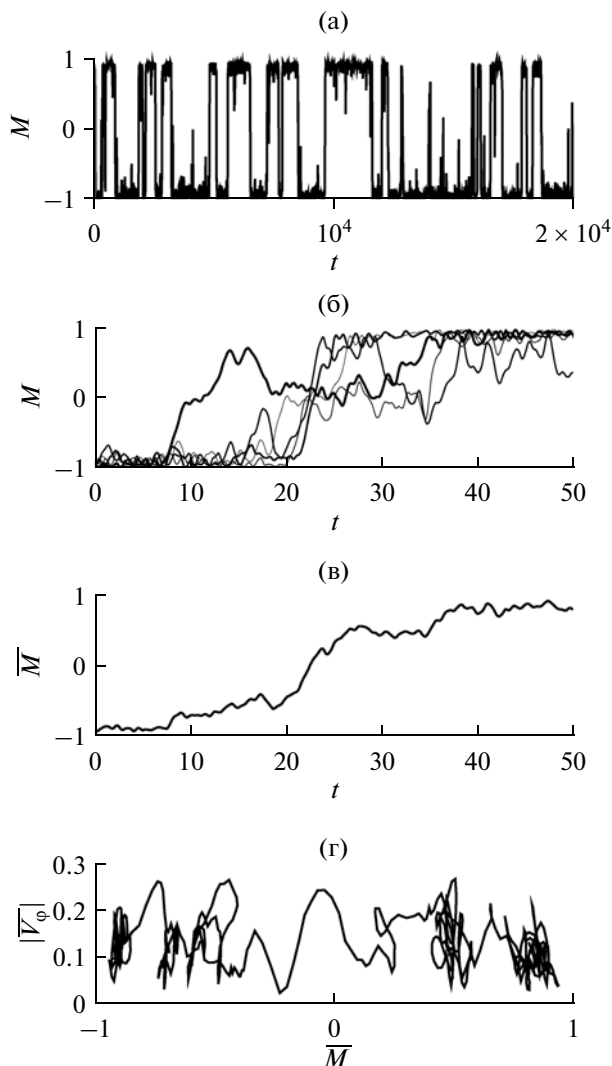


Рис. 5. (а) Эволюция во времени M для $\gamma = 1$, $\lambda = -4.8$, $\epsilon = 0.8$, $\kappa = 0.2$. Время t представлено в безразмерных единицах. Длина всего интервала $\sim 9 \times 10^6$ лет. (б) Инверсии поля (по степени утолщения линии) для пяти интервалов времени: (9640, 9690), (12000, 12050), (12260, 12310), (17840, 17890), (18670, 18720). Для 3-го и 5-го интервалов значение M взято с обратным знаком. (в) Среднее значение \bar{M} для рисунка (г). (д) Среднее значение абсолютного значения скорости прецессии $|\bar{V}_\phi|$ как функция \bar{M} .

амплитуду скорости прецессии магнитного диполя V_ϕ вокруг географической оси. Из последовательности инверсий (рис. 5а) выберем пять инверсий, совместив начала инверсий на одном графике (см. рис. 5б). Характерной особенностью модели домино является наличие переходного режима при малых значениях $|M|$. В этом состоянии система “не знает”, в каком направлении двигаться, что выражается в большом количестве экскурсов магнитного поля (см. рис. 5а). Для ответа на вопрос о возможности предсказания ин-

версии рассмотрим поведение средних по пяти реализациям \bar{M} и $|\bar{V}_\phi|$ (рис. 5в, 5г). Как мы видим, смена полярности не приводит к существенному изменению амплитуды $|\bar{V}_\phi|$, что не позволяет предсказывать наступление инверсии по данному критерию.

Существенным недостатком модели домино, предполагающей дальное действие при описании спинового взаимодействия, является отсутствие связи между положением спина и создаваемым им трехмерным магнитным полем. Именно с этим связано использование нами до последнего момента времени упрощенной интегральной характеристики поля M . Следующим шагом является введение поля спина, посредством которого и осуществляется межспиновое взаимодействие. Прежде чем перейти к усовершенствованию модели, суммируем наши требования к ней: (i) потенциальная энергия сонаправленных спинов должна иметь минимум при их расположении вдоль оси вращения; (ii) модель позволяла бы расчет трехмерного магнитного поля в произвольной точке пространства.

Отождествление спинов с магнитными диполями позволило авторам (Nakamichi и др., 2012) получить трехмерное распределение магнитного поля системы спинов, заменив спины магнитными диполями с полем:

$$\mathbf{B} = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) - r^2\mathbf{d}}{r^5}, \quad (17)$$

где \mathbf{d} – магнитный момент диполя в центре координат, а \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения. Однако, как следует из (17), устойчивым состоянием для двух магнитных диполей, находящихся на расстоянии R друг от друга и имеющих энергию взаимодействия

$$U = \frac{3(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{R})(\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{R}) - (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2)R^2}{R^5}, \quad (18)$$

является квадрупольная конфигурация, когда магнитные моменты \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 направлены противоположно друг другу. Для объяснения же существования средних полей в ферромагнетиках, когда магнитные моменты доменов сонаправлены, требуется учет квантовых эффектов (энергии обменного взаимодействия). Другими словами, в работе (Nakamichi и др., 2012) использовалось выражение для потенциальной энергии взаимодействия спинов, взятое из квантовой механики, а пространственное распределение трехмерного магнитного поля рассчитывалось для ансамбля магнитных диполей на основе классической электродинамики. Поскольку результаты в модели домино оказываются весьма привлекательными, мы и дальше будем придерживаться такого же сценария, не вводя дополнительных усложнений в мо-

дель. Обратим внимание, что для того чтобы получить используемое в (5) выражение для U , нужно изменить знак в (18) и отбросить первый член, который мал в интервалах времени между инверсиями.

Используя выражение (17) для ансамбля N диполей, расположенных по окружности единичного радиуса, рассчитаем распределение трех компонент магнитного поля. Прежде, чем перейти к анализу карт поля, рассмотрим как меняются его спектральные характеристики во времени. Для этого рассмотрим последовательность пяти инверсий магнитного поля из расчета на рис. 4а (см. рис. 5а), представленных в виде эволюции аксиального дипольного коэффициента Гаусса g_1^0 в разложении по сферическим функциям на расстоянии трех радиусов окружности, на которой расположены сами спины. В целом, данное поведение можно охарактеризовать равным временем вхождения и выхода из инверсии, близкими амплитудами полями с разными полярностями, увеличением g_1^0 сразу до и после инверсии. Равенство времен означает, что взаимодействие между отдельными спинами не успевает существенно повлиять на поведение спинов за время инверсии. Максимальное значение g_1^0 достигается, когда все $\theta_i = 0$ или π , это, в свою очередь, соответствует минимуму потенциальной энергии, связанной с взаимодействием спинов и вращением системы, и повышенным значениям скоростей $\dot{\theta}_i$, что и является причиной последующей инверсии.

Поскольку амплитуда спинов не зависит от времени, то интегральный поток магнитного поля по модулю по произвольной поверхности, окружающей нашу систему, остается постоянным, а следовательно, и интеграл по спектру магнитного поля также сохраняется, например во время инверсии поля. Как показывают расчеты (см. рис. 6б), для рассмотренной геометрии, когда отношение средних по времени амплитуд дипольной и квадрупольной компонент $\bar{\mathcal{D}}/\bar{\mathcal{Q}} \approx 13$ сравнимо с наблюдаемым на поверхности Земли, в момент инверсии $t \sim 2100$ амплитуда диполя \mathcal{D} резко падает, а интенсивность квадрупольного поля \mathcal{Q} возрастает.

Интересно, что в трехмерных расчетах перераспределение магнитной энергии во время инверсий также наблюдается. Последнее связано с тем, что при больших магнитных числах Рейнольдса в магнитострофических системах во вращающейся системе координат магнитная энергия много больше кинетической, и уже нельзя списать уменьшение магнитной энергии диполя во время инверсии на увеличение кинетической энергии течений. В этом случае возможно лишь

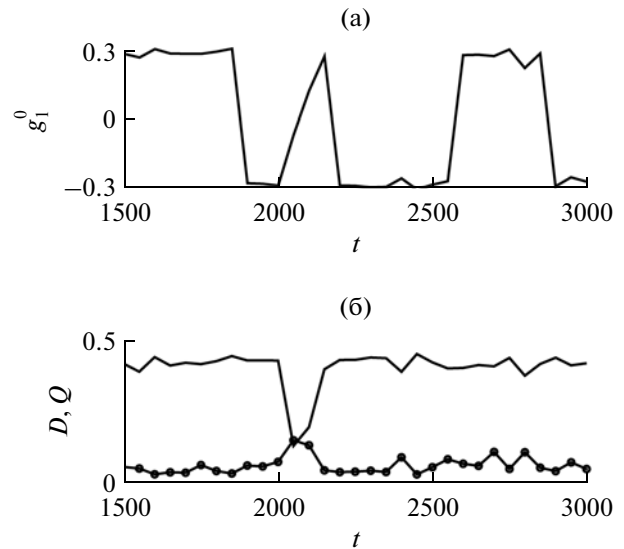


Рис. 6. Эволюция (а) g_1^0 и $\mathcal{D} = \sqrt{2}\sqrt{g_1^{02} + g_1^{12} + h_1^{12}}$ (сплошная линия), $\mathcal{Q} = \sqrt{3}\sqrt{g_2^{02} + g_2^{12} + h_2^{12} + g_2^{22} + h_2^{22}}$ (кружочки) (б). Время t представлено в безразмерных единицах (см. подпись к рис. 5а).

перераспределение магнитной энергии между масштабами.

Обратим внимание, что модель воспроизводит два принципиально разных класса инверсий: при смене знака g_1^0 интенсивность полного магнитного поля может как падать и становиться сравнимой с квадрупольной ($t \sim 2100$), так и оставаться на прежнем уровне (другие 4 инверсии магнитного поля). Если в первом случае происходят некоррелированные в горизонтальной плоскости перевороты отдельных спинов, то во втором случае спины вращаются в параллельных плоскостях так, что суммарный магнитный момент остается неизменным. Для рассмотренного режима второй случай является более вероятным. Введение азимутальных неоднородностей может привести к предпочтительности первого сценария. Эффект является принципиально трехмерным и связан с появлением азимутальной компоненты силы, учитывающей взаимодействие между спинами, в динамических уравнениях (16). Согласно наблюдениям, оба сценария инверсии имеют право на существование.

На рис. 7 представлены распределения B_r -компоненты магнитного поля во время одной из инверсий. Как мы видим на рис. 6б, возможность спинов вращаться по углу ϕ приводит к появлению предпочтительного “коридора”, по которому происходит смена полярности. Данное явление является предметом многолетних дискуссий палеомагнитологов (Jacobs, 2005), и результат зачастую зависит от метода обработки наблюдений древнего магнитного поля.

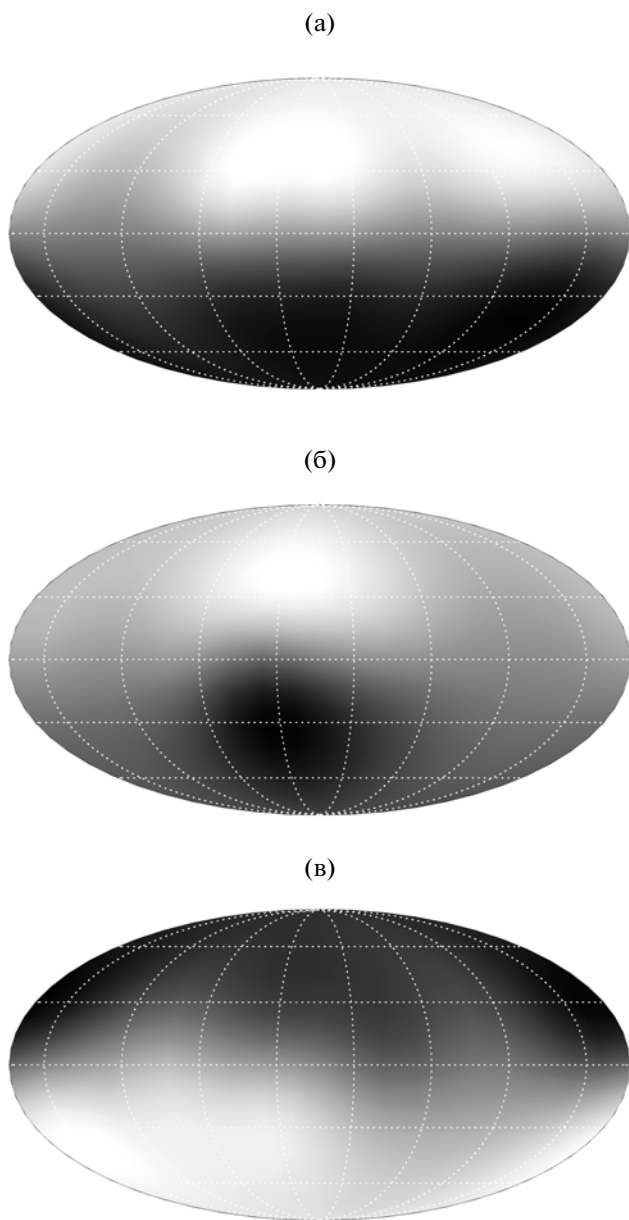


Рис. 7. Распределение B_z -компоненты магнитного поля в проекции Мольвейде в моменты безразмерного времени $t = 2500$ (а), 2600 (б), 2700 (в). Белый цвет соответствует положительным значениям, черный – отрицательным значениям поля.

ОБСУЖДЕНИЕ

Конечно же, рассмотренную модель динамо следует отнести к разряду игрушечных, “toy”-моделей. Однако многие составляющие данной модели выдерживают и достаточно серьезную критику. Для иллюстрации проведем аналогию с хорошо известной моделью Паркера (Parker, 1955), не требующей особой рекламы и послужившей прототипом для создания аппарата моделей динамо среднего поля (Krause, Rädler, 1980), в част-

ности, Z -модели геодинамо Брагинского. Как в модели домино, так и в модели Паркера, понятию циклонической конвекции отводится принципиальное значение. В моделях среднего поля вращение является тем самым механизмом, который приводит к нарушению зеркальной симметрии, генерации спиральности, α -эффекта и крупномасштабных магнитных полей. Однако уже на уровне приложений возможность удобного и простого использования аппарата теории теряется, поскольку нарушается ряд требований по однородности и изотропии случайных физических полей. В результате ряд ключевых параметров, используемых в теории, требует адаптации для условий высокой анизотропии в геострофических режимах.

В то же время, при моделировании трехмерных задач динамо в ядрах планет отправным пунктом является создание циклонической конвекции. Магнитное поле в первом приближении не меняет структуру таких течений, и, конечно же, если “toy”-модель использует такую информацию, то наглядность предлагаемых сценариев тех или иных физических процессов только усиливается. Интересно, что необходимое в теории средних полей разделение по масштабам для пространственных масштабов в модели домино выполняется автоматически, поскольку энергонесущий масштаб турбулентности определяется числом циклонов $N \gg 1$. Обратим внимание, что введение нелокального взаимодействия спинов позволяет получить протяженный спектр вариации поля (Nakatani и др., 2012). Читатель также должен относиться с пониманием к некоторой вольности определения понятия самого циклона: в действительности, во время инверсии меняется лишь направление магнитного поля индивидуального циклона, в то время, как его гидродинамика остается устойчивой. Поскольку сила Лоренца квадратична по магнитному полю, то это не противоречит законам электродинамики.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для каждого i -го спина запишем нелинейную систему (16) в следующем виде, опустив для удобства индекс i для введенных коэффициентов A, B, C, D :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i + A\dot{\phi}_i + B &= 0, \\ C\dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i \sin \theta_i + D &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -\kappa \sin \theta_i, \quad B = -\frac{\mathcal{F}'_{i\phi}}{\sin \theta_i} - \frac{\epsilon \Psi_i}{\sin \theta_i \sqrt{\tau}}, \\ C &= \kappa, \quad D = -\gamma \sin 2\theta_i + \mathcal{F}'_{i\theta} + \frac{\epsilon \chi_i}{\sqrt{\tau}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Система (19) в дискретном виде в остаточной форме с использованием неявной схемы Эйлера на n -шаге по времени записывается в виде:

$$\mathbf{e}^n = \begin{pmatrix} \theta^n + A^n \varphi^n - \theta^{n-1} - A^n \varphi^{n-1} + B^n dt \\ C^n \theta^n + \sin \theta^n \varphi^n - C^n \theta^{n-1} - \sin \theta^n \varphi^{n-1} + D^n dt \end{pmatrix} \quad (21)$$

Систему (21) требуется разрешить относительно вектора

$$\mathbf{y}^n = \begin{pmatrix} \theta^n \\ \varphi^n \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Рассмотрим итеративный процесс по методу Ньютона–Рапсона для p -итерации:

$$\mathbf{y}_p^n = \mathbf{y}_{p-1}^n - \left(\frac{\partial \mathbf{e}_{p-1}^n}{\partial \mathbf{y}_{p-1}^n} \right)^{-1} \cdot \mathbf{e}_{p-1}^n, \quad (23)$$

где матрица Якоби имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_p^n}{\partial \mathbf{y}_p^n} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial A_p^n}{\partial \theta_p^n} (\varphi_p^n - \varphi^{n-1}) + \frac{\partial B_p^n}{\partial \theta_p^n} dt & A_p^n + \frac{\partial B_p^n}{\partial \varphi_p^n} dt \\ C_p^n + \cos \theta_p^n (\varphi_p^n - \varphi^{n-1}) + \frac{\partial D_p^n}{\partial \theta_p^n} dt & \sin \theta_p^n + \frac{\partial D_p^n}{\partial \varphi_p^n} dt \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Для каждого момента времени n и для каждого спина i осуществляется итеративный процесс (23) с учетом обновленных значений других спинов. После достижения сходимости для всех спинов происходит переход на новый шаг по времени $n + 1$. На каждом шаге по времени происходит проверка условий $\theta_i \in (0, 2\pi)$, $\varphi_i \in (0, 2\pi)$ и при необходимости делается соответствующая поправка на периодичность. Данный алгоритм оказывается весьма устойчив к сингулярностям на оси. Не составляет труда переделать данный алгоритм для 2-го порядка точности, применив схему Кранка–Николсона

вместо схемы Эйлера. Обратим внимание, что наличие сингулярности на оси, являющееся следствием использования сферической системы координат, не приводит к неустойчивостям, как это бывает в задачах с пространственными производными. В нашей задаче при приближении к полюсу приращения скорости возрастают и спин “выдавливается” из приполярной области. Ситуация принципиально отличается от задачи в частных производных, где приходится исключать область вблизи оси или пользоваться несеточными методами.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Сведем систему (16) к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} V_i - \dot{\theta}_i &= 0, \\ W_i - \dot{\varphi}_i &= 0, \\ \dot{V} + \kappa V + W \sin \theta_i + A &= 0, \\ \dot{W} - \sin \theta_i V + \kappa \sin^2 \theta_i W + B &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$A = -\gamma \sin 2\theta_i + \mathcal{F}'_{i\theta} + \frac{\epsilon \chi_i}{\sqrt{\tau}}, \quad B = \mathcal{F}'_{i\varphi} + \frac{\epsilon \psi_i}{\sqrt{\tau}}, \quad (26)$$

относительно вектора

$$\mathbf{y}^n = \begin{pmatrix} V^n \\ W^n \\ \theta^n \\ \varphi^n \end{pmatrix}. \quad (27)$$

После дискретизации имеем остаточные вектора для n -го шага по времени:

$$\mathbf{e}^n = \begin{pmatrix} V^n dt - \theta^n + \theta^{n-1} \\ W^n dt - \varphi^n + \varphi^{n-1} \\ V^n - V^{n-1} + \kappa V^n dt + W^n \sin \theta_i^n dt + A^n dt \\ W^n - W^{n-1} - \sin \theta_i^n V^n dt + \kappa \sin^2 \theta_i^n W^n dt + B^n dt \end{pmatrix} \quad (28)$$

и матрицу Якоби:

$$\hat{\mathbf{j}} = \frac{\partial \mathbf{e}_p^n}{\partial \mathbf{y}_p^n} = \begin{bmatrix} dt & 0 & -1 & 0 \\ 0 & dt & 0 & -1 \\ 1 + \kappa dt & \sin \theta_i^n dt & W^n \cos \theta_i^n dt + \frac{\partial A^n}{\partial \theta} dt & \frac{\partial A^n}{\partial \varphi^n} dt \\ -\sin \theta_i^n dt & 1 + \kappa \sin^2 \theta_i^n dt & J_{43} & \frac{\partial B^n}{\partial \varphi^n} dt \end{bmatrix}, \quad (29)$$

где

$$J_{43} = -\cos\theta_i V^n dt + \kappa \sin 2\theta_i W^n dt + \frac{\partial B^n}{\partial \theta^n} dt. \quad (30)$$

Далее используется итеративный алгоритм, рассмотренный в Приложении А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
- Busse F.H. Thermal instabilities in rapidly rotating systems // J. Fluid Mech. 1970. V. 44. P. 441–460.
- Christensen U.R., Aubert J., Cardin P. A numerical dynamo benchmark // Phys. Earth and Planet. Inter. 2001. V. 128. P. 25–34.
- Christensen U., Aubert J. Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields // Geophys. J. Int. 2006. V. 166. P. 97–114.
- Cupal I., Hejda P., Reshetnyak M. Dynamo model with thermal convection and with the free-rotating inner core // Planet. and Space Sci. 2002. V. 50. P. 1117–1122.
- Hejda P., Reshetnyak M. Effects of anisotropy in the geostrophic turbulence // Phys. Earth and Planet. Inter. 2009. V. 177. P. 152–160.
- Glatzmaier G.A., Coe R.S., Hongre L., Roberts P.H. The role of the Earth's mantle in controlling the frequency of geomagnetic reversals // Nature. 1999. V. 401. P. 885–890.
- Jacobs J.A. Reversals of the Earth's magnetic field. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. 356 p.
- Jones C.A. Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 2000. V. A358. P. 873–897.
- Jones C.A. Planetary magnetic fields and fluid dynamos // Annu. Rev. Fluid Mech. 2011. V. 43. P. 583–614.
- Krause F., Rädler K.-H. Mean field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Berlin: Akademie-Verlag, 1980. 271 p.
- Milat J., Albuquerque G., Thiaville A. An introduction to micromagnetics in the dynamic regime // Topics Appl. Phys. 2002. V. 83. P. 1–34.
- Mori N., Schmitt D., Wicht J. // Domino model for geomagnetic field reversals. Phys. Rev. E. 2013. V. 87. P. 012108. arXiv:1110.5062v2.
- Nakamichi A., Mouri H., Schmitt D. Coupled spin models for magnetic variation of planets and stars // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 2012. V. 423. № 4. P. 2977–2990. arXiv:1104.5093v1.
- Olson P.L., Coe R.S., Driscoll P.E., Glatzmaier G.A., Roberts P.H. Geodynamo reversal frequency and heterogeneous core–mantle boundary heat flow // Phys. Earth and Planet. Inter. 2010. V. 180. P. 66–79.
- Parker E.N. Hydromagnetic dynamo models // Astrophys. J. 1955. V. 122. P. 293–314.
- Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. N.Y.: Springer-Verlag, 1987. 720 p.
- Rudiger G., Hollerbach R. The Magnetic Universe: Geophysical and Astrophysical Dynamo Theory. Weinheim: Wiley VCH, 2004. 332 p.
- Shatsillo A.V., Didenko A.N., Pavlov V.E. Two competing paleomagnetic directions in the late Vendian: new data for the SW region of the Siberian platform // Russ. J. Earth Sci. 2005. V. 7. № 4. P. 3–24.
- Stanley H.E. Introduction to phase transitions and critical phenomena. Oxford: Clarendon Press, 1971. 308 p.